

Somme de variables aléatoires

Exercice 1

Le cinéma de la commune propose différents tarifs :

- Un tarif plein à 12 euros.
- Un tarif étudiant à 7 euros.
- Un tarif enfant (moins de 12 ans) à 5 euros.

Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients un tarifs enfants et les autres un tarif étudiants.

Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons a 4 euros, 23% achète uniquement un paquet de pop-corn taille standard à 5 euros et 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn grande taille à 7 euros. Les autres clients n'achètent rien.

On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires qui associent à chaque issue respectivement le prix payé pour la place de cinéma et pour les confiseries.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2 .
2. Déterminer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le prix total dépensé pas le client.
 - (a) Exprimer X en fonction de X_1 et X_2 .
 - (b) En déduire $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On considère une urne dans laquelle se trouve différentes boules de couleur : 25 boules rouges, 10 boules vertes et 5 boules noires.

On tire avec remise trois boules de l'urne.

A chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points.

Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note respectivement R_i , V_i et N_i l'événement "obtenir une boule rouge (respectivement une boule verte ou une boule noire) au $i^{\text{ème}}$ tirage.

On note enfin X_1 , X_2 et X_3 les variables qui associe à chaque issue le nombre de points obtenu au premier (respectivement deuxième et troisième) tirage.

1. Donner les valeurs suivantes :
 $X_1 (V_1 \cap R_2 \cap N_3)$, $X_2 (V_1 \cap R_2 \cap N_3)$, $X_1 (V_1 \cap R_2 \cap R_3)$, $X_2 (V_1 \cap R_2 \cap R_3)$
et $X_3 (V_1 \cap R_2 \cap R_3)$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X_1 , X_2 et X_3 .
3. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.

4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre total de points.
 - (a) Exprimer X en fonction de X_1 , X_2 et X_3
 - (b) En déduire $E(X)$

Exercice 3

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les montants en euros :

1; 2; 3 et 4

Soit X la variable aléatoire associant à chaque issue le gain algébrique en euros affiché.

1. Calculer $E(X)$, interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Calculer $V(X)$.
3. On décide de doubler chacun des montants (par exemple 3 devient 6). Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros de ce deuxième jeu.
 - (a) Exprimer Z en fonction de X
 - (b) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
4. On décide enfin d'ajouter 2 à chacun des montants (par exemple 3 devient 5). Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros de ce troisième jeu.
 - (a) Exprimer Y en fonction de X .
 - (b) En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 4

On tire au hasard et avec remise 3 cartes dans un jeu de 52 cartes.

On gagne 7 euros par as obtenu, 4 euros par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 euro pour n'importe quelle autre carte obtenue.

Par exemple, si on tire : as de pique, 7 de trèfle et valet de carreau, on gagne : $7 - 1 + 4 = 10$ euros.

On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique total à ce jeu.

1. Décomposer Z sous la forme d'une somme de trois variables aléatoires que l'on définira.
2. En déduire $E(Z)$
3. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5

Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches.

On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Déterminer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
 - (a) M : "Les deux boules tirées sont de la même couleur".
 - (b) D : "Les deux boules tirées sont de couleurs différentes".
2. On considère le jeu suivant :
 Le joueur perd $(n + 1)^2$ euros si M est réalisé, et il gagne $2(n + 1)^2$ euros sinon.
 Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le gain réalisé.

- (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- (b) Montrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$
- (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?
- (d) Si on laisse le choix du nombre de boules blanches au joueur, combien de boules doit-il choisir ?

Exercice 6

Une étude à été faite sur un grand nombre de festivals.

On choisit au hasard un festival.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de spectateurs.

On sait que $E(X) = 12000$ et de $V(X) = 1500$.

Chaque billet est vendu au tarif de 45 euros et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 euros.

Soit B la variable aléatoire qui associe à chaque issue le bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.

Déterminer $E(B)$ et $\sigma(B)$.

Exercice 7

On choisit au hasard un candidat pour la session 2025 d'un concours. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la note sur 10 obtenu par le candidat.

On sait que X a pour espérance $E(X) = 4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$.

Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5 en multipliant chaque note par un nombre $a > 0$ et en additionnant b au résultat, où a et b sont deux réels. Il applique ainsi une transformation affine à X .

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = aX + b$.

1. Exprimer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ en fonction de a et b .
2. En déduire a et b .

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq r \leq n$.

Un placard contient n paires de chaussures.

On tire au hasard $2r$ chaussures du placard et on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotés de 1 à n et pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire qui associe 1 à chaque issue si les deux chaussures de la paire i se trouvent dans les chaussures tirées, et 0 sinon.

1. Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.
2. Soit i un entier naturel tel que $1 \leq i \leq n$.
Déterminer le nombre d'issues qui contiennent la paire numéro i .
3. En déduire que pour tout i compris entre 1 et n , on a :

$$E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$$

4. En déduire $E(X)$ **Exercice 9**

Thomas effectue deux services de suite au tennis.

Lors de son premier service, la probabilité qu'il réussisse est de 0,6.

- Si le premier service est réussi, alors le second sera réussi avec une probabilité de 0,8.
- Si le premier service est raté, alors le second sera réussi avec une probabilité de 0,4.

On note X_1 la variable aléatoire qui associe 1 à chaque issue si le premier service est réussi et 0 sinon.

On note X_2 la variable aléatoire qui associe 1 à chaque issue si le second service est réussi et 0 sinon.

On définit la variable aléatoire X par $X = X_1 + X_2$.

1. Calcul de l'espérance.

- (a) Donner une interprétation de X dans le contexte de l'exercice.
- (b) Déterminer la loi de probabilité de X_2 .
- (c) Calculer les espérances de X_1 et X_2 . En déduire, $E(X)$.

2. Calcul de la variance.

- (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- (b) En déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- (c) Calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
- (d) Comparer $V(X)$ avec $V(X_1) + V(X_2)$ et donner la raison pour laquelle ces résultats sont différents.

 Exercice 10

Une équipe de trois joueurs de basketball se préparent à un concours de lancer à trois points.

Chaque joueur va tenter 10 lancers.

- Pour chaque lancer, le joueur 1 a une probabilité de 0,8 de réussir ;
- Pour chaque lancer, le joueur 2 a une probabilité de 0,7 de réussir ;
- Pour chaque lancer, le joueur 3 a une probabilité de 0,5 de réussir.

On note, pour tout entier naturel i tel que $1 \leq i \leq 10$:

- X_i la variable aléatoire qui associe 1 à la série de lancer des joueurs si le lancer i est réussi par joueur 1 ;
- Y_i la variable aléatoire qui associe 1 à la série de lancer des joueurs si le lancer i est réussi par joueur 2 ;
- Z_i la variable aléatoire qui associe 1 à la série de lancer des joueurs si le lancer i est réussi par joueur 3 ;

Pour finir, on note :

- X la variable aléatoire qui associe à chaque série de lancer le nombre de lancers réussis du joueur 1.
- Y la variable aléatoire qui associe à chaque série de lancer le nombre de lancers réussis du joueur 2.
- Z la variable aléatoire qui associe à chaque série de lancer le nombre de lancers réussis du joueur 3.
- S la variable aléatoire qui associe à chaque série de lancer le nombre de lancers réussis

de l'équipe.

1. Soit i un entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$
 - (a) Donner la loi de probabilité de X_i .
 - (b) Calculer $E(X_i)$ et en déduire $E(X)$.
2. De même, déterminer $E(Y)$ et $E(Z)$.
3. En déduire $E(S)$.

Exercice 11

On considère une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et numéroté de 1 à 3.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on dit qu'il y a "rencontre" au $k^{\text{ième}}$ tirage lorsque l'on tire la boule numéroté k au $k^{\text{ième}}$ tirage.

On cherche à connaître le nombre moyen de rencontres.

Pour tout $(m, k) \in \{1; 2; 3\}^2$, on note $B_{m,k}$ l'événement "On a obtenu la boule m au $k^{\text{ième}}$ tirage".

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. On note X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires définies par :
 - $X_1 = 1$ si la boule numéroté 1 est tirée en premier et 0 sinon.
 - $X_2 = 1$ si la boule numéroté 2 est tirée en deuxième et 0 sinon.
 - $X_3 = 1$ si la boule numéroté 3 est tirée en troisième et 0 sinon.
 Donner alors $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de rencontre.
 - (a) Exprimer X en fonction de X_1 , X_2 et X_3 .
 - (b) En déduire le nombre moyen de rencontre.
4. On considère une urne contenant n boules numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise n boules de l'urne.
 Quel est théoriquement le nombre moyen de rencontre ?

Exercice 12

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

PARTIE 1

Le premier exercice est constitué de deux questions Q_1 et Q_2 .

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

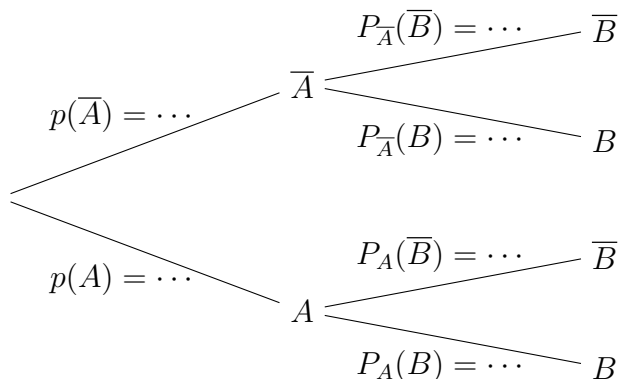
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q_1 .
- Si le candidat répond correctement à Q_1 , il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q_2 .
- S'il ne répond pas correctement à Q_1 , il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q_2 .

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : "le candidat répond correctement à la question Q_1 " ;
- B l'évènement : "le candidat répond correctement à la question Q_2 ".

On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les événements contraires de A et de B .

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q_1 et Q_2 .
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q_2 .

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q_1 .
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q_2 .
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.
4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 . En déduire l'espérance de X . Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
 5. On souhaite déterminer la variance de X .
 - (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
 - (b) Montrer que la variance de X vaut 0,57.
 - (c) A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant?

PARTIE 2

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

Pour tout entier naturel i avec $1 \leq i \leq 8$, on note Y_i la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question i du deuxième exercice.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

Soit i un entier naturel tel que $1 \leq i \leq 8$.

1. Donner la loi de probabilité de Y_i .
2. En déduire $E(Y_i)$ et $V(Y_i)$.
3. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

PARTIE 3

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z .

2. Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour i entier variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

(a) Quelle est l'espérance de M_n ?

(b) Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?

(c) Pour les valeurs trouvées en b., montrer que la probabilité que $6,3 \leq M_n \leq 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75.