

Somme de variables aléatoires

I Rappel



Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$



Exemple

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la somme des résultats obtenus.

X peut donc être représentée par le tableau suivant où chaque case représente une issue de l'expérience aléatoire :

2 ^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

C'est à dire : $X((2;4)) =$, $X((1;5)) =$. ou encore $X((1;1)) =$

En considérant que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on aura :

$$P(X = 4) = P((1;3)) + P((2;2)) + P((3;1)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$



Remarque

En définissant une variable aléatoire sur un univers Ω , on réalise une partition de l'univers.

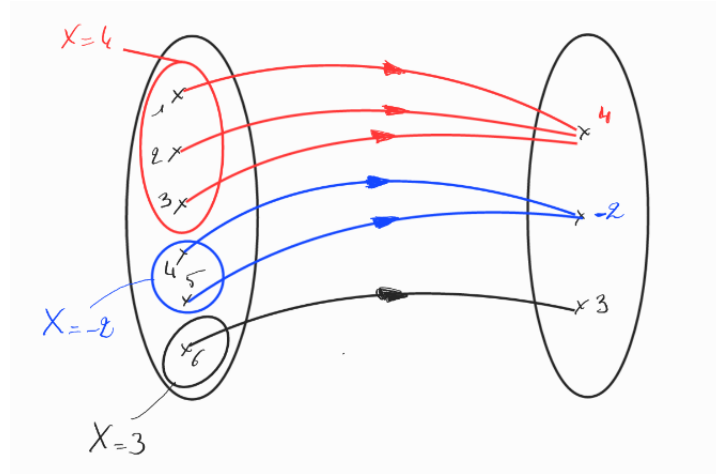
En effet, si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire X , alors :

- $(X = x_0) \cup (X = x_1) \cup \dots \cup (X = x_n) = \Omega$
- Pour tout entiers naturels i et j inférieur à n tels que $i \neq j$ on a $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$

On lance un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue 4 si le résultat est inférieur ou égal à 3, -2 si le résultat est 4 ou 5 et 3 si le résultat est 6.

Cette situation est représentée par le schéma ci-dessous.



On a donc $X(1) = 4$, $X(2) = 4$, $X(3) = 4$ et pour tout $i \notin \{1; 2; 3\}$, $X(\{i\}) \neq 4$.
D'où

$$P(X = 4) = P(\{1; 2; 3\}) =$$

♥ Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω .

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.

On a alors :

- $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$
- $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω .

1 Définition



Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.

$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

Exemples

L'exemple vu au I peut aussi être modélisé en utilisant la somme de deux variables aléatoires comme ci-dessous.

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du premier dé et Y celle qui associe à chaque issue le résultat du second dé.

La variable aléatoire $Z = X + Y$ associe donc à chaque issue la somme des deux dés.

De même, la variable aléatoire $T = 3X$ associe à chaque issue le triple du résultat du premier dé.

$Z = X + Y$ et $T = 3X$ peuvent donc être représentées par les tableaux suivants :

2 ^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2 ^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce de 1 euros. L'expérience aléatoire est donc le lancé des deux éléments (la pièce et le dés).

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue (Chaque lancé des deux éléments) le résultat du dé et Y la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

Dans les tableaux suivants, chaque case représente une issue.

Pour la variable aléatoire X :						
pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile						
face						

Pour la variable aléatoire Y :						
pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile						
face						

On a donc :

$$E(X) =$$

et

$$E(Y) =$$

$$V(Y) =$$

$$\sigma(Y) =$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$E(X + Y) =$$

$$\text{et } E(-2X) =$$

$$V(-2Y) =$$

$$\text{et } \sigma(-2Y) =$$

Remarques

- $\forall b \in \mathbb{R}, E(X + b) = E(X) + b$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
- Si X est une variable aléatoire qui associe à chaque issue le même réel b , alors $V(X) = 0$, on écrit $V(b) = 0$ et par conséquent $\sigma(b) = 0$

III Variables aléatoires indépendantes



Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$.

On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, on a :

$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

 Exemple

Dans l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

On a pour tout $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \{1; -2\}$, on a

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \quad \quad \quad \text{et} \quad P(X = i) \times P(Y = j) =$$

Donc

 Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

 Exemple

En reprenant l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

et

$$V(Y) = \frac{9}{4} \quad \text{comme vu dans l'exemple précédent}$$

X et Y étant des variables aléatoires **indépendantes**, on a :

$$V(X + Y) =$$

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués

 Définition

On dit que deux variables aléatoires sont **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

X et Y sont **identiquement distribuées** si pour tout entier naturel $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$P(X = r_i) = P(Y = r_i)$$

Exemple

Une roue de loterie comporte 4 secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et le dernier vaut -400 points.

On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers. L'expérience aléatoire est donc la succession des quatre lancers.

Soit X_i la variable aléatoire qui associe à chaque issue (4 lancers de roue) le gain du $i^{\text{ème}}$ lancer de roue pour i allant de 1 à 4.

X_1, X_2, X_3 et X_4 ont donc la même loi de probabilité, elle sont donc

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω .

On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont la **même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X .

On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont **indépendantes et identiquement distribuées** et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$			

On a donc :

$$E(X) =$$

$$V(X) =$$

Par conséquent :

$$\circ E(S_4) =$$

$$\circ V(S_4) =$$

$$\circ \sigma(S_4) =$$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

$$\circ E(S_n) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

◦ Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes, on a :

$$V(S_n) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\circ \sigma(S_n) =$$

Propriétés

Soit $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X . On a alors :

$$\circ E(M_n) = E(X)$$

$$\circ V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

$$\circ \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) = 75$$

$$V(X) = 81875$$

Par conséquent :

- $E(M_4)$
- $V(M_4)$
- $\sigma(M_4) =$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(M_n) =$
- $V(M_n) =$
- $\sigma(M_n) =$