

Somme de variables aléatoires

I Rappel



Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$



Exemple

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la somme des résultats obtenus.

X peut donc être représentée par le tableau suivant où chaque case représente une issue de l'expérience aléatoire :

2 ^e dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

C'est à dire : $X((2; 4)) = 6$, $X((1; 5)) = 6$. ou encore $X((1; 1)) = 2$

En considérant que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on aura :

$$P(X = 4) = P((1; 3)) + P((2; 2)) + P((3; 1)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$



Remarque

En définissant une variable aléatoire sur un univers Ω , on réalise une partition de l'univers.

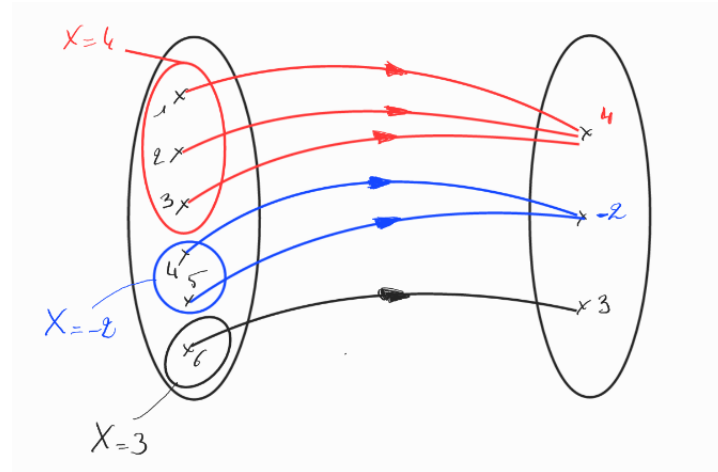
En effet, si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire X , alors :

- $(X = x_0) \cup (X = x_1) \cup \dots \cup (X = x_n) = \Omega$
- Pour tout entiers naturels i et j inférieur à n tels que $i \neq j$ on a $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$

On lance un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue 4 si le résultat est inférieur ou égale à 3, -2 si le résultat est 4 ou 5 et 3 si le résultat est 6.

Cette situation est représentée par le schéma ci-dessous.



On a donc $X(1) = 4$, $X(2) = 4$, $X(3) = 4$ et pour tout $i \notin \{1; 2; 3\}$, $X(\{i\}) \neq 4$.
 D'où $P(X = 4) = P(\{1; 2; 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

♥ Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω .

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.

On a alors :

- $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

- $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω .

1 Définition



Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.

$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.



Exemples

L'exemple vu au I peut aussi être modélisé en utilisant la somme de deux variables aléatoires comme ci-dessous.

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du premier dé et Y celle qui associe à chaque issue le résultat du second dé.

La variable aléatoire $Z = X + Y$ associe donc à chaque issue la somme des deux dés.

De même, la variable aléatoire $T = 3X$ associe à chaque issue le triple du résultat du premier dé.

$Z = X + Y$ et $T = 3X$ peuvent donc être représentées par les tableaux suivants :

Pour Z :	$2^e \text{ dé} \backslash 1^e \text{ dé}$	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

et pour T :

$2^e \text{ dé} \backslash 1^e \text{ dé}$	1	2	3	4	5	6
1	3	6	9	12	15	18
2	3	6	9	12	15	18
3	3	6	9	12	15	18
4	3	6	9	12	15	18
5	3	6	9	12	15	18
6	3	6	9	12	15	18

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

♥ Propriété (Admise)

X étant une variable aléatoire définie sur un univers Ω , on a :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)$$

💡 Exemple

On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la valeur 5 si le résultat est supérieur ou égale à 5 et 1 dans le cas contraire.

Le tableau suivant résume bien la situation.

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	1	1	1	5	5
$P(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

et

x_i	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

dans ce cas :

$$\circ P(X = 1) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{4}{6}$$

$$\circ P(X = 5) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{6}$$

d'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 5 \times P(X = 5) \\ &= 1 \times (P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})) + 5 \times (P(\{5\}) + P(\{6\})) \\ &= 1 \times P(\{1\}) + 1 \times P(\{2\}) + 1 \times P(\{3\}) + 1 \times P(\{4\}) + 5 \times P(\{5\}) + 5 \times P(\{6\}) \\ &= \sum_{i=1}^6 X(i) \times P(\{i\}) \end{aligned}$$

Démonstration

Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X , i un entier naturel compris entre 1 et n et A_i l'ensemble des issues de l'univers Ω associé à x_i , autrement dit :

$$A_i = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x_i\}$$

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est donc une partition de l'univers ω et on a $P(X = x_i) = \sum_{\omega \in A_i} P(\omega)$, d'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \times \sum_{\omega \in A_i} P(\omega) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\omega \in A_i} x_i \times P(\omega) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\omega \in A_i} X(\omega) \times P(\omega) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\omega) \quad \text{car } \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \text{ est une partition de l'univers.} \end{aligned}$$

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a| \sigma(X)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce de 1 euro. L'expérience aléatoire est donc le lancé des deux éléments (la pièce et le dé).

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue (Chaque lancé des deux éléments) le résultat du dé et Y la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

Dans les tableaux suivants, chaque case représente une issue.

	pièce \ dé	1	2	3	4	5	6		pièce \ dé	1	2	3	4	5	6
Pour X :	pile	1	2	3	4	5	6	et pour Y :	pile	1	1	1	1	1	1
	face	1	2	3	4	5	6		face	-2	-2	-2	-2	-2	-2

On a donc :

$$E(X) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

et

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(-2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$E(X + Y) = \frac{7}{2} + \frac{-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad E(-2X) = (-2) \times \frac{7}{2} = -7$$

$$V(-2Y) = (-2)^2 \times \frac{9}{4} = 9 \quad \text{et} \quad \sigma(-2Y) = |-2| \times \sigma(Y) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

Démonstration

1. En effet, l'espérance de la somme de deux variables aléatoires :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) P(\omega) + Y(\omega) P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\omega) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

2. Pour l'espérance du produit de la variable aléatoire X par le réel a

$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX)(\omega) P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (a \times X(\omega)) P(\omega) \\ &= a \times \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) \\ &= aE(X) \end{aligned}$$

3. Pour la variance du produit de la variable aléatoire X par le réel a

$$\begin{aligned} V(aX) &= E((aX)^2) - E(aX)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) ((aX)(\omega))^2 - (aE(X))^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) (a \times X(\omega))^2 - a^2 E(X)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} a^2 P(\omega) X(\omega)^2 - a^2 E(X)^2 \\ &= a^2 \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)^2 - a^2 E(X)^2 \\ &= a^2 \left(\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)^2 - E(X)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2(E(X^2) - E(X))^2 \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}$$

4. Et pour l'écart type du produit de la variable aléatoire X par le réel a
- $$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X).$$

Remarques

- $\forall b \in \mathbb{R}, E(X + b) = E(X) + b$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
- Si X est une variable aléatoire qui associe à chaque issue le même réel b , alors $V(X) = 0$, on écrit $V(b) = 0$ et par conséquent $\sigma(b) = 0$

III Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$.

On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, on a :

$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euro, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

On a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \{1, -2\}$, on a

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

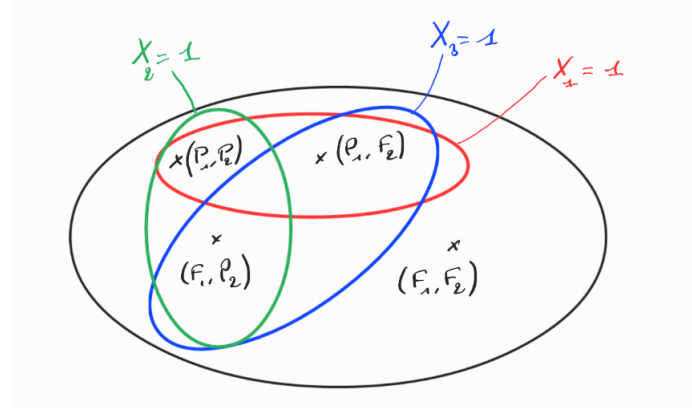
D'où l'indépendance de X et Y .

Danger

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors **on ne peut pas conclure** qu'elles sont indépendantes comme le montre l'exemple suivant :

En effet, si l'on considère deux lancer d'une pièce de monnaie et si l'on note :

- X_1 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du premier lancer est pile et 0 sinon.
- X_2 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du second lancer est pile et 0 sinon.
- X_3 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le nombre de piles obtenu est impair et 0 sinon.



On a alors X_1 et X_2 qui sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = i) \times P(X_2 = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De même X_1 et X_3 sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P((X_1 = i) \cap (X_3 = j)) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) \times P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On montre de même que X_2 et X_3 sont aussi indépendantes.

Donc X_1 , X_2 et X_3 sont **deux à deux indépendantes** et pourtant :

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = P(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Donc X_1 , X_2 et X_3 **ne sont pas indépendantes**

♥ Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

💡 Exemple

En reprenant l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

et

$$V(Y) = \frac{9}{4} \quad (\text{Voir exemple précédent})$$

X et Y étant des variables aléatoires **indépendantes**, on a :

$$V(X + Y) = \frac{35}{12} + \frac{9}{4} = \frac{31}{2}$$

Démonstration

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω , on a :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + E(2XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \times (E(XY) - E(X)E(Y)) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{\omega \in \Omega} XY(\omega).P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\omega).P(\omega) \end{aligned}$$

or $(X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est une partition de l'univers, donc :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy.P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\}) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy.P(\{X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y)\}) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy.P(\{(X = x) \cap (Y = y)\}) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy.P(X = x).P(Y = y) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x) \times \sum_{y \in Y(\Omega)} y.P(Y = y) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués

Définition

On dit que deux variables aléatoires sont **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

X et Y sont **identiquement distribuées** si pour tout entier naturel $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$P(X = r_i) = P(Y = r_i)$$

Exemple

Une roue de loterie comporte 4 secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et le dernier vaut -400 points.

On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers. L'expérience aléatoire est donc la succession des quatre lancers.

Soit X_i la variable aléatoire qui associe à chaque issue (4 lancers de roue) le gain du $i^{\text{ème}}$ lancer de roue pour i allant de 1 à 4.

X_1, X_2, X_3 et X_4 ont donc la même loi de probabilité, elle sont donc **identiquement distribuées**.

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω .

On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont la **même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X .

On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) = \left(\frac{1}{2} \times 300\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)\right) = 75$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 300^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)^2\right) - 75^2 = 81875$$

Par conséquent :

- $E(S_4) = 4E(X) = 300$
- $V(S_4) = 4V(X) = 327500$
- $\sigma(S_4) = \sqrt{4} \times \sigma(X) = 150$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
 $= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
 $= E(X) + E(X) + \dots + E(X)$
 $= nE(X)$
- Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes, on a :
 $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
 $= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$
 $= V(X) + V(X) + \dots + V(X)$
 $= nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Propriétés

Soit $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la **moyenne** d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X . On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) = 75$$

$$V(X) = 81875$$

Par conséquent :

- $E(M_4) = E(X) = 75$
- $V(M_4) = \frac{81875}{4}$
- $\sigma(M_4) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{81875}}{2}$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \times S_n\right) = \frac{1}{n} \times E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$

$$\begin{aligned} \circ V(M_n) &= V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} \\ \circ \sigma(M_n) &= \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

3 Application à la loi binomiale

Propriété (admise)

Toute variable aléatoire Y qui suit une loi binomiales $\mathcal{B}(n; p)$ peut s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Propriété

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètre n et p .

On a alors :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1 - p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$

Démonstration

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Y peut donc s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p , d'où $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$, d'où :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1 - p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$