

Somme de variables aléatoires

I Rappel



Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$



Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω .

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.

On a alors :

- $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$
- $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω .

1 Définition



Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.
 $T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires



Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

III Variables aléatoires indépendantes



Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$.

On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, on a :

$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$



Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués



Définition

On dit que deux variables aléatoires sont **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

X et Y sont **identiquement distribuées** si pour tout entier naturel $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$P(X = r_i) = P(Y = r_i)$$

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

**Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω .

On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont **la même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X .

On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

**Propriétés**

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

**Propriétés**

Soit $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la **moyenne** d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X . On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$