

Nombres complexes - Interprétation géométrique

I Module et argument d'un nombre complexes

Dans tout ce chapitre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

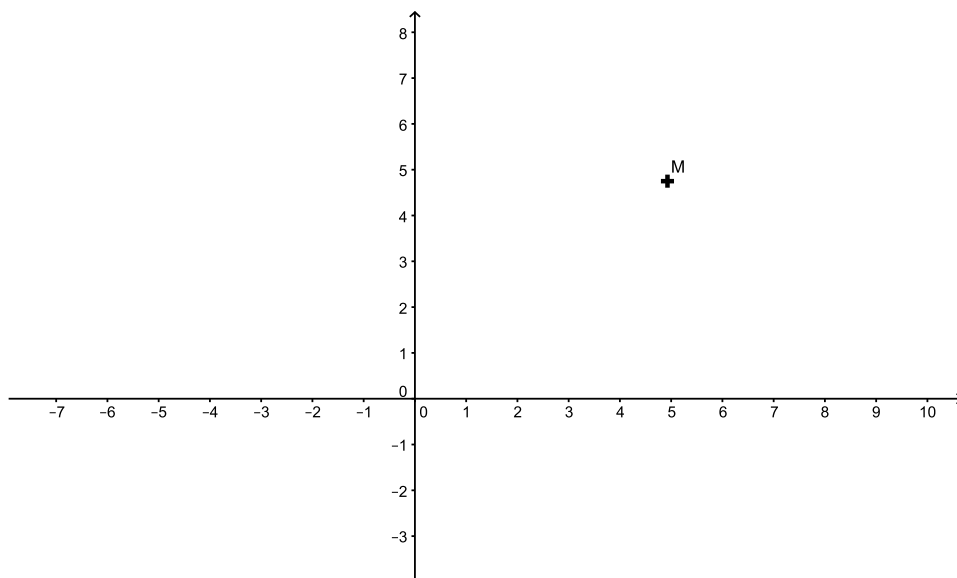


Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que M est le point du plan d'affixe $z = a + ib$ si M a pour coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on écrit alors : $M(a + ib)$

- Le **module** de z , noté $|z|$, est le réel strictement positif défini par $|z| = OM$
- On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Exemple

avec $z = 2 + i2\sqrt{3}$, on obtient :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

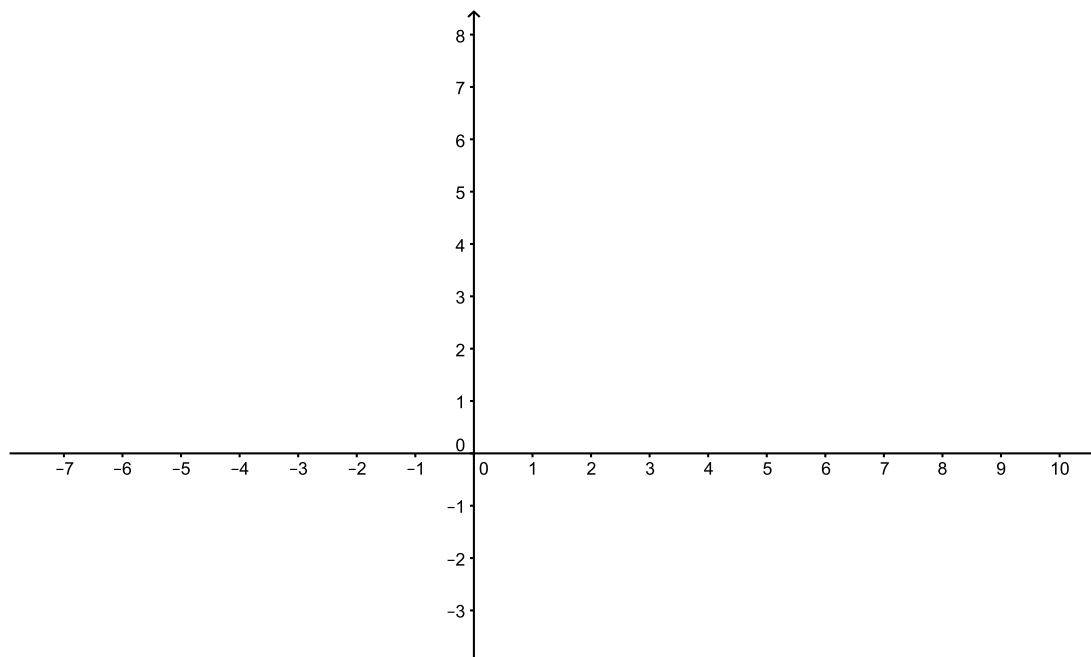
D'autre part, en notant θ l'argument de z , on a :

$$\cos(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

| Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π .

Remarque

- Un nombre complexe a plusieurs arguments, par exemple $1+i$ a pour argument $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4} \dots$
- Si $z = a + ib$ avec a et b réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul.



Remarques

Pour tout nombre complexe z non nul, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Propriété

1. Pour tout nombre complexe z , $z\bar{z} = |z|^2$
2. Pour tout nombre complexe z , $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$

Démonstration

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$ et on a :

**Propriété**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

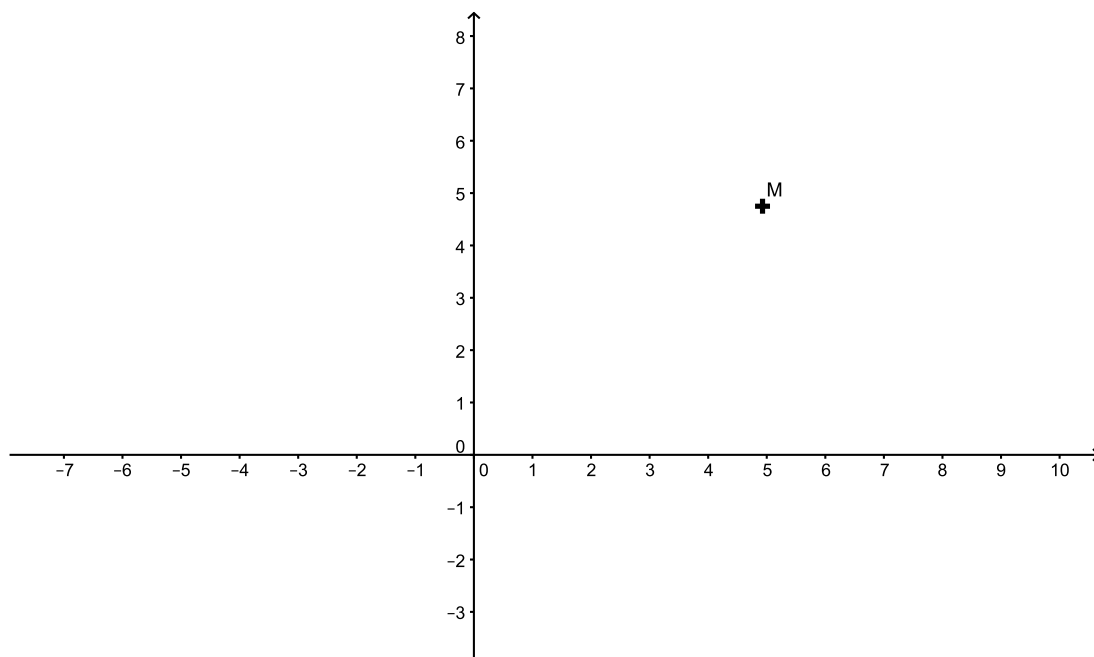
- $|zz'| = |z||z'|$
- avec $z \neq 0$, on a : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

**Démonstration**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

II Forme trigonométrique

1 Introduction



♥ Propriété

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ avec θ (modulo 2π).

Cette forme est appelée **forme trigonométrique** de z .

dans ce cas :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

💡 Exemples

- Soit $z = 1 + i$

On a donc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, d'où, par une factorisation par $\sqrt{2}$, on obtient :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{et par conséquent} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$$

- Soit $z = 4 - 3i$

On a donc $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, d'où, par une factorisation par 5, on obtient :

$$z = 5 \times \left(\frac{4}{5} + i \frac{-3}{5} \right)$$

$$\text{et par conséquent} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{4}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{-3}{5} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \text{ modulo } 2\pi$$

♥ Propriétés préliminaires : Rappel

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ et $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ et $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \sin(a)$

🔪 Démonstration

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- En effet, si $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a :

$$\text{D'une part } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(a - b) = \cos(a - b)$$

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)$$

$$\text{D'où } \cos(a - b) = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a) \text{ ou encore } \boxed{\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)}$$

- $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b)$
or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$

donc $\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$

○ $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$, d'où :

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

et par conséquent $\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$

○ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a)$,

or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$

donc $\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}$

♥ Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

○ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

○ avec $z \neq 0$, on a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

○ avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

🔪 Démonstration

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

○ $zz' = r(\cos(a) + i\sin(a)) \times r'(\cos(b) + i\sin(b))$
 $= rr'(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b))$
 $= rr'(\cos(a)\cos(b) + i^2\sin(a)\sin(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b))$
 $= rr'(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)))$
 $= rr'(\cos(a+b) + i\sin(a+b))$

or $|zz'| = |z||z'| = rr'$

$\boxed{\text{donc } \arg(zz') = a + b = \arg(z) + \arg(z')}$

○

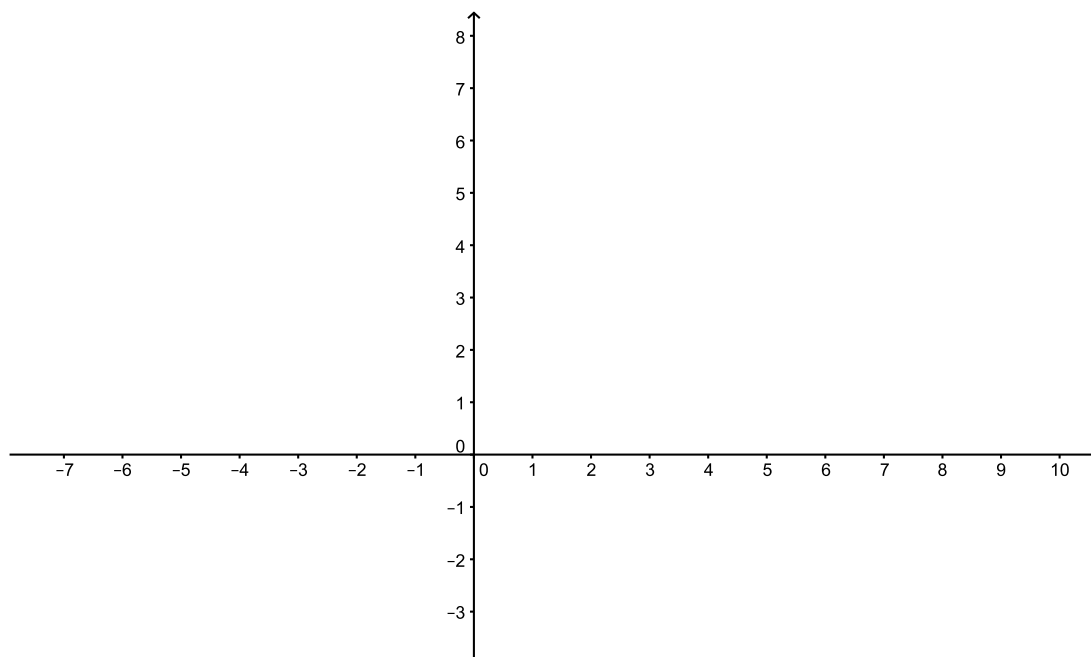


Définition

Soit A et B deux points du plan d'affixe respectives z_A et z_B . On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

On a alors dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

- $|z_B - z_A| = AB$
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$



Propriété

Soient A , B , C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D .

- $\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB}$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Démonstration

Remarque

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

- Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel, alors les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
- Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pure, alors les droites (CD) et (AB) sont perpendiculaires.

2 Forme exponentielle

On remarque que pour tout nombres complexes non nul z et z' , on a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

En posant $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec r et r' les modules respectifs de z et z' et θ et θ' les arguments de z et z' , on obtient, en utilisant les propriétés usuelles de la fonction exponentielle :

$$zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Cette notation est donc bien adaptée au produit de deux nombres complexes.

Définition

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Propriété

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

 Exemple



 Démonstration

