

Nombres complexes - Interprétation géométrique

I Module et argument d'un nombre complexes

Dans tout ce chapitre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

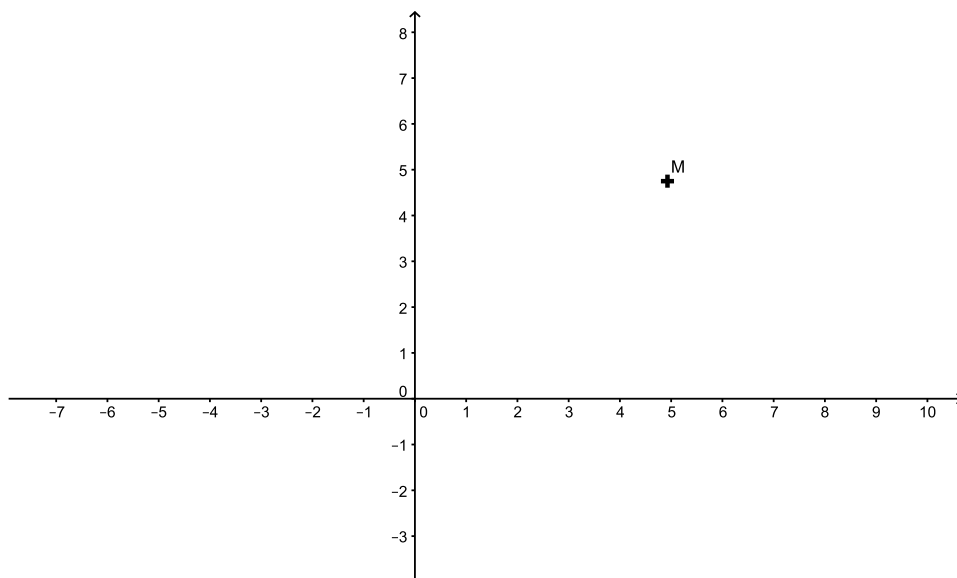


Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que M est le point du plan d'affixe $z = a + ib$ si M a pour coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on écrit alors : $M(a + ib)$

- Le **module** de z , noté $|z|$, est le réel strictement positif défini par $|z| = OM$
- On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Exemple

avec $z = 2 + i2\sqrt{3}$, on obtient :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

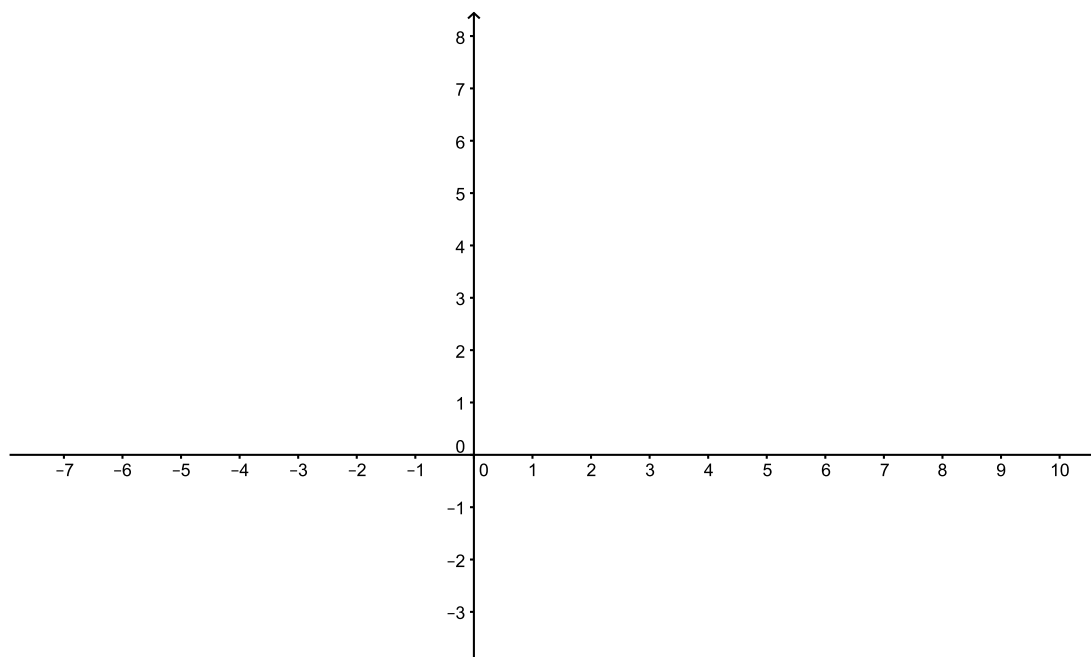
D'autre part, en notant θ l'argument de z , on a :

$$\cos(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

| Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π .

Remarque

- Un nombre complexe a plusieurs arguments, par exemple $1+i$ a pour argument $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4} \dots$
- Si $z = a + ib$ avec a et b réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul.



Remarques

Pour tout nombre complexe z non nul, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Propriété

1. Pour tout nombre complexe z , $z\bar{z} = |z|^2$
2. Pour tout nombre complexe z , $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$

Démonstration

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$ et on a :

1. $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$
Donc $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|-z|^2 = -z \times (\overline{-z}) = -z \times (-\bar{z}) = z\bar{z} = |z|^2$, donc $|-z| = |z|$.
De même, $|\bar{z}|^2 = \bar{z} \times \overline{\bar{z}} = \bar{z}z = |z|^2$ Donc $|\bar{z}| = |z|$

♥ Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $|zz'| = |z||z'|$
- avec $z \neq 0$, on a : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

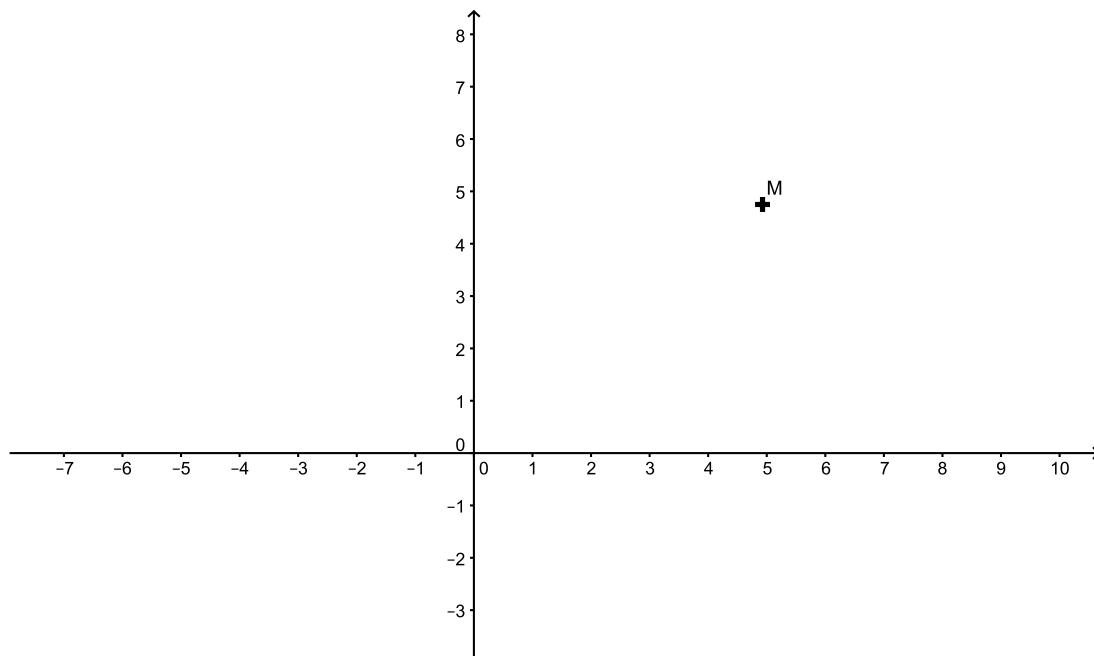
🔪 Démonstration

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $|zz'|^2 = zz' \overline{zz'} = zz' \overline{z} \overline{z'} = z \overline{z} z' \overline{z'} = |z|^2 |z'|^2$, d'où $|zz'| = |z||z'|$
- avec $z \neq 0$, on a : $\left| \frac{1}{z} \right|^2 = \frac{1}{z} \overline{\left(\frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z \overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|} \right)^2$, d'où $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \frac{1}{z'} \right| = |z| \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \frac{1}{|z'|}$, d'où $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

II Forme trigonométrique

1 Introduction



♥ Propriété

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ avec θ (modulo 2π).

Cette forme est appelée **forme trigonométrique** de z .
dans ce cas :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Exemples

- Soit $z = 1 + i$

On a donc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, d'où, par une factorisation par $\sqrt{2}$, on obtient :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

et par conséquent $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$

- Soit $z = 4 - 3i$

On a donc $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, d'où, par une factorisation par 5, on obtient :

$$z = 5 \times \left(\frac{4}{5} + i \frac{-3}{5} \right)$$

et par conséquent $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{4}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{-3}{5} \end{cases}$ donc $\theta = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \text{ modulo } 2\pi$

Propriétés préliminaires : Rappel

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ et $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ et $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \sin(a)$

Démonstration

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- En effet, si $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a :

D'une part $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(a - b) = \cos(a - b)$

D'autre part $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)$

D'où $\cos(a - b) = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)$ ou encore $\boxed{\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)}$

- $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b)$

or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$

donc $\boxed{\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)}$

- $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$, d'où :

$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(b)$

$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$

et par conséquent $\boxed{\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)}$

- $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(-b) + \sin(-b) \cos(a)$,
or $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$
donc $\boxed{\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)}$

♥ Propriété

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- avec $z \neq 0$, on a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- avec $z' \neq 0$, on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

🔪 Démonstration

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Avec $r = |z|$, $r' = |z'|$, $a = \arg(z)$ et $b = \arg(z')$, on a :

$z = r(\cos(a) + i \sin(a))$ et $z' = r'(\cos(b) + i \sin(b))$

- $zz' = r(\cos(a) + i \sin(a)) \times r'(\cos(b) + i \sin(b))$
 $= rr'(\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b))$
 $= rr'(\cos(a) \cos(b) + i^2 \sin(a) \sin(b) + i \cos(a) \sin(b) + i \sin(a) \cos(b))$
 $= rr'(\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) + i(\sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)))$
 $= rr'(\cos(a + b) + i \sin(a + b))$

or $|zz'| = |z||z'| = rr'$

$\boxed{\text{donc } \arg(zz') = a + b = \arg(z) + \arg(z')}$

- avec $z \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} r(\cos(a) - i \sin(a)) \\ &= \frac{r}{|z|^2} (\cos(-a) + i \sin(-a)) = \frac{|z|}{|z|^2} (\cos(-a) + i \sin(-a)) \\ &= \frac{1}{|z|} (\cos(-a) + i \sin(-a)) \end{aligned}$$

Avec $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$\boxed{\text{Donc } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)}$

- avec $z' \neq 0$, on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

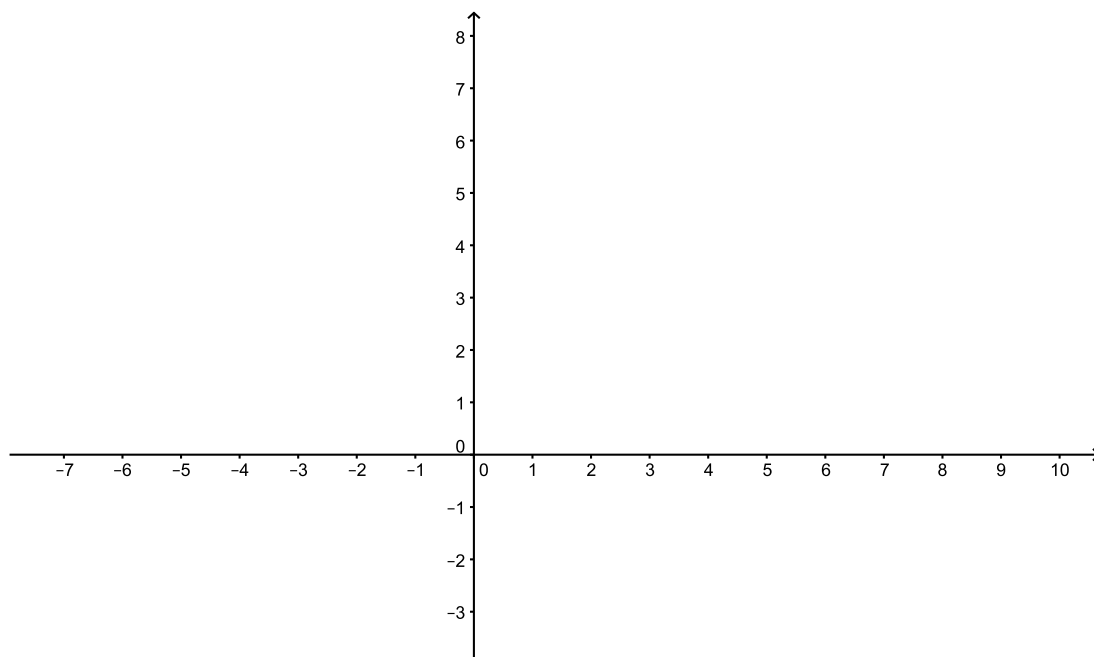
😊 Définition

Soit A et B deux points du plan d'affixe respectives z_A et z_B . On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

On a alors dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

- $|z_B - z_A| = AB$

$$\circ \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$$



♥ Propriété

Soient A , B , C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D .

$$\circ \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB}$$

$$\circ \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

🔪 Démonstration

$$\begin{aligned} \circ \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| &= \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB} \\ \circ \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \end{aligned}$$

 Remarque

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

- Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel, alors les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
- Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pure, alors les droites (CD) et (AB) sont perpendiculaires.

2 Forme exponentielle

On remarque que pour tout nombres complexes non nul z et z' , on a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

En posant $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec r et r' les modules respectifs de z et z' et θ et θ' les arguments de z et z' , on obtient, en utilisant les propriétés usuelles de la fonction exponentielle :

$$zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Cette notation est donc bien adaptée au produit de deux nombres complexes.

 Définition

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

 Propriété

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

 Exemple

 Démonstration

En effet, en utilisant la forme complexe d'un nombre complexe z , il existe deux réels $r \geq 0$ et θ tels que $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
d'où $z = re^{i\theta}$