

Loi Binomiale

Exercice 1

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{9}{10}$

1. Calculer $P(X \leq 1)$
2. En déduire $P(X \geq 2)$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = \frac{3}{7}$.
Calculer l'espérance et l'écart type de X .

Exercice 3

Tatiana participe à un jeu pour lequel elle doit payer 5 euros.
Dans un jeu de 32 cartes, elle doit tirer 4 cartes avec remise.
Si elle obtient quatre as, elle gagne m euros.
Si elle tire 1, 2 ou 3 as, elle gagne 10 euros.
Sinon, elle perd sa mise.

1. Si $m = 50$, le jeu est-il équitable ?
2. A partir de quelle valeur de m ce jeu devient-il favorable à Tatiana ?

Exercice 4

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux manières

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- \bar{D} et \bar{A} les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
 - (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
 - (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
 - (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
 - (a) Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
 - (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 5

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à $0,08$.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

- (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.

Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

- Dans cette question 1. on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
- Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 6

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♥	
♥		
		♥

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

- Justifier qu'il y a exactement 84 manières différentes de positionner les trois coeurs sur une grille.
- Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.
- Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
- Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.

- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
- Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X = 5)$.
- Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $n = 56$ et $p = 0,13$. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} de :

- $P_{X \leq 10}(X = 9)$
- $P_{X > 5}(X < 15)$

Exercice 8

Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) du Grand Ouest, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.2$

- Déterminer la probabilité qu'il se passe une journée sans aucune intervention.
- Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
- Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui ?

Exercice 9

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Cet exercice propose de démontrer que $E(X) = np$

- Démontrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- On rappelle que que $E(X) = \sum_{k=0}^n k \times p(X = k)$.

Donner l'expression de $p(X = k)$ lorsque $0 \leq k \leq n$ puis en déduire que :

$$E(X) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

- En effectuant le changement d'indice $i = k - 1$, montrer que :

$$E(X) = np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i}$$

4. En utilisant $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, déduire que $E(X) = np$

Exercice 10

On suppose que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent en haut de la falaise où se trouvent seulement deux chemins menant vers deux plages. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisi au hasard, de manière équiprobable et indépendamment des autres, l'une des deux directions suivantes : la plage à l'est ou la plage à l'ouest.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de touristes qui choisissent la plage à l'est.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X .
2. On suppose ici que les deux plages sont désertes au départ et on considère qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.
 - (a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
 - (b) Lorsque $n = 3$, quelle est la probabilité d'avoir un touriste heureux ?
 - (c) De manière générale, démontrer que la probabilité p qu'il y ait un touriste heureux parmi n touristes est $p = \frac{n}{2^{n-1}}$
 - (d) En déduire la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux sur un groupe de 10.

Exercice 11

Deux lycées sont situés dans la même commune.

Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examens : 75% des élèves de l'établissement obtiennent le bac avec mention.

Dans le lycée B, seulement 55% des élèves l'obtiennent avec mention.

On choisit 12 élèves du lycée A et 20 du lycée B.

Le nombre important d'élèves dans chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à des tirages avec remise.

On note respectivement X et Y les variables aléatoires associant à chaque issue le nombre d'élèves du lycée A (respectivement du lycée B) ayant eu le bac avec mention.

1. Donner les lois suivies par X et Y .
2. Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre d'élèves ayant eu le bac avec mention indépendamment de leur lycée d'origine.
 - (a) Exprimer Z en fonction de X et de Y .
 - (b) En déduire $E(Z)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - (c) Calculer $V(Z)$ et en déduire $\sigma(Z)$

 **Exercice 12**

Les jours où elle s'entraîne au jet de 7 mètres au handball, Elia fait 30 tirs le matin et 50 l'après-midi. Elle marque avec une probabilité égale à 0,46 le matin et une probabilité égale à 0,78 l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.

On choisit un tir d'Elia au hasard dans la journée.

Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Elia le matin (respectivement l'après-midi).

1. Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y .
2. Que représente $X + Y$?
3. Calculer $E(X + Y)$ et en donner une interprétation.