

# loi binomiale

## 1 Schéma de Bernoulli



### Définition

Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est expérience aléatoire à deux issues, généralement dénommées succès et échec, la probabilité d'un succès étant  $p$ , celle d'un échec étant  $q = 1 - p$ .



### Exemples

- Lancer d'une pièce de monnaie équilibré et savoir si le résultat est pile ou face est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$
- Interroger une personne dans la rue et lui demander si elle a plus ou moins de 30 ans est une expérience de Bernoulli.
- On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse à la probabilité d'obtenir le résultat 6. Dans ce cas, le lancer du dé peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{6}$ .



### Définition

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si elle est à valeur dans  $\{0; 1\}$  et si :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

La variable aléatoire  $X$  associe donc la valeur 1 au succès d'une l'expérience de Bernoulli et 0 à l'échec.



### Exemples

- Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ , alors on a :

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

C'est le cas du lancer d'une pièce de monnaie, en considérant le résultat pile comme un succès.

- Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{6}$ , alors on a :

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \text{ et } P(X = 0) = \frac{5}{6}$$

C'est le cas du lancer d'un dé à 6 faces en considérant par exemple le résultat 6 comme un succès et tout autre résultat comme un échec.

### Propriété

Soit  $X$  un variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on a alors :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(n - p)$$

### Démonstration

- $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$
- $V(X) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p)$   
 $= (1 - p)^2 p + p^2 (1 - p)$   
 $= p(1 - p) \times (1 - p + p)$  par factorisation par  $p(1 - p)$   
 $= p(1 - p)$

## 2 Loi Binômiale

### Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de  $n$  épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes.

### Définition

On renouvelle  $n$  fois de manière **indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de succès obtenus à l'issue des  $n$  épreuves.

On dit alors que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , noté  $\mathcal{B}(n, p)$ .

### Exemple

On lance 15 fois de suite un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6. Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de fois que l'on a obtenu 6. On a bien la répétition 15 fois et de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{6}$ . Donc  $X$  suit

la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(15; \frac{1}{6}\right)$ .

### ♥ Propriété

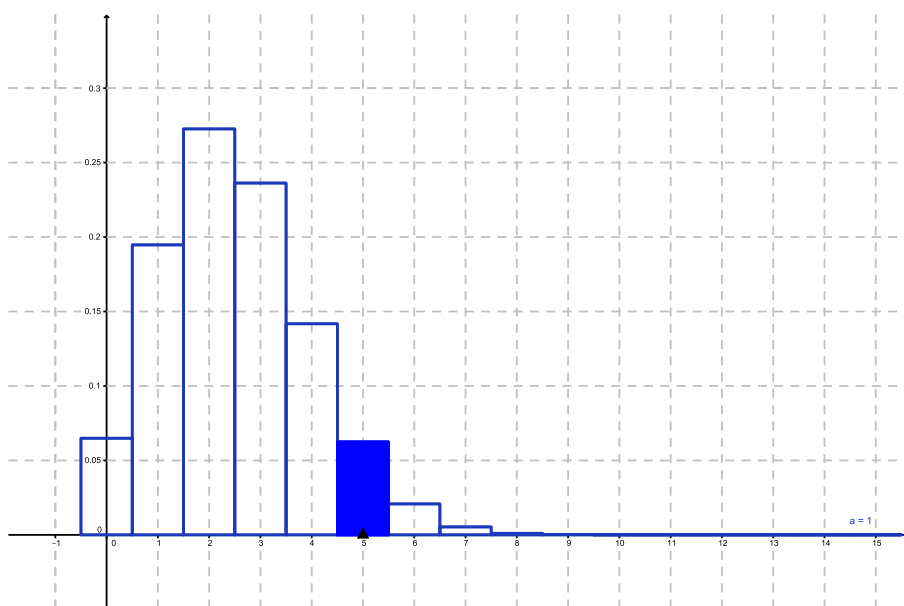
Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit alors la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , noté  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
On a alors pour tout entier naturel  $k$  tel que  $k \in [0, n]$  on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

### 💡 Exemple

On lance 15 fois de suite un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6.  
Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de fois que l'on a obtenu 6.  
On a bien la répétition 15 fois et de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{6}$ . Donc  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(15; \frac{1}{6}\right)$ .  
On a alors, par exemple pour  $k = 5$  :

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{15-5}$$



### 🔪 Démonstration

On considère une expérience aléatoire constitué de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes.  
Soient  $E$  l'ensemble de cardinal  $n$  des  $n$  épreuves de Bernoulli et  $k$  un entier naturel tel que  $k \in [0; n]$

Chaque issue de l'expérience aléatoire peut être représentée par la combinaison de  $E$  constitué des succès. Par exemple  $\{1; 5; 6\}$  signifie que seules la première, la cinquième et la sixième épreuves de Bernoulli ont été couronnées d'un succès avec bien sur, dans ce cas,  $n \geq 6$ .

Les  $n$  épreuves de Bernoulli étant indépendantes, la probabilité de n'importe quelle combinaison constitué de  $k$  succès est  $p^k (1-p)^{n-k}$

Or le nombre de combinaisons à  $k$  éléments de  $E$  est  $\binom{n}{k}$ , donc la probabilité d'avoir  $k$  succès

est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$X$  étant une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$ .

### ♥ Propriété

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ , noté  $\mathcal{B}(n, p)$ . On a alors :

1.  $E(X) = np$
2.  $V(X) = np(1-p)$
3.  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

### 💡 Exemple

Dans l'exemple précédent, où  $X$  suit  $\mathcal{B}\left(15; \frac{1}{6}\right)$ , on a :

- $E(X) = 15 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$
- $\sigma(X) = \sqrt{15 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

### 📄 Démonstration

On renouvelle  $n$  fois de manière **indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de succès obtenus à l'issue des  $n$  épreuves.

$X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , noté  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i \leq n$  et  $X_i$  la variable aléatoire qui à chaque issue associe 1 si le résultat de la  $i^{\text{ème}}$  épreuve est un succès et 0 sinon.

Dans ce cas,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X_1$  et  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , d'où :

- $E(X) = nE(X_1) = np$  car  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ont la même loi de probabilité.
- $V(X) = nV(X_1) = np(1-p)$  car  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes et ont la même loi de probabilité.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$