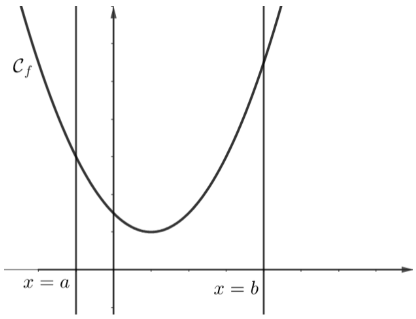
Intégrale de fonction

I Intégrale d'une fonction continue et de signe constant

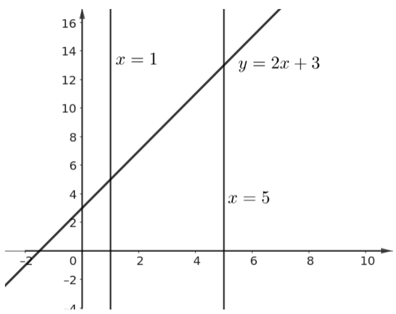
Définition

Intégrale d'une fonction continue et positive.
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'intégrale de a à b de f, noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est l'aire comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
Cette aire est exprimée en unité d'aire.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
Calculer $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$.



Pour tout $x \in [1;5]$, $f(x) > 0$, donc $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$ est l'aire du domaine, en unités d'aires, compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$, donc :

$$\int_1^5 f(x)dx = (5-1) \times \frac{f(1)+f(5)}{2} = 4 \times \frac{5+13}{2} = 36$$

Remarque

Dans $\int_1^5 f(x)dx$, x joue le rôle d'une variable locale, on peut la remplacer par d'autres lettres. D'où :

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 f(t)dt = \int_1^5 f(u)du$$

Propriété Relation de Chasles

Soient a, b et c trois réels tels que $a \leqslant b \leqslant c$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ et telle que pour tout $x \in [a;c]$, $f(x) \geqslant 0$
Dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$$\int_{-5}^2 x^2dx = \int_{-5}^{-1} x^2dx + \int_{-1}^2 x^2dx$$

II Intégrale et primitive

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout x de $[a;b]$, $F'(x) = f(x)$. C'est à dire que F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, définie sur $\mathbb{R}$, étant une primitive de f, il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \frac{x^3}{3} + k$$

or $F(1) = 0$, donc $\dfrac{1}{3} + k = 0$, d'où $k = \dfrac{-1}{3}$.
Donc $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$

Démonstration

On démontre cette propriété dans le cas d'une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a; b]$.
Soient f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a; b]$ et F_a la fonction définie sur $[a; b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Démontrons que F_a est une primitive de f sur $[a; b]$

- Soient $x \in [a; b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \in [a; b]$.
  d'après la relation de Chasles,
  $F(a+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt.$
  Donc $F(x+h) = F(x) + \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt.$
  ou encore $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt.$
  or f est croissante sur $[a; b]$ et $h > 0$, donc l'aire comprise entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vérifie l'inégalité :
  $$h \times f(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant h \times f(x+h)$$
  d'où :
  $$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$
  f étant continue sur $[a; b]$, on a $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, donc par encadrement :
  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$
- On montre de même que pour tout $x \in [a; b]$ et tout $h < 0$ tel que $x + h \in [a; b]$ on a :
  $$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Donc F_a est dérivable sur $[a; b]$ et que pour pour tout $x \in [a; b]$, $F_a'(x) = f(x)$, c'est à dire que F_a est une primitive de f sur $[a; b]$.
D'autre part, $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.
Donc F_a est **la** primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.
Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^3dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\\ &= 4 - \frac{1}{4}\\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f.
La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a;b]$, étant la primitive de f qui s'annule en a, il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$.
or $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, donc $F(a) + k = 0$ et par conséquent $k = -F(a)$, donc :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

ou encore, en substituant x par b :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

III Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Propriété - (Admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de f sur $[a;b]$ est le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.

Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{x+3} - 2x\right)dx &= \big[\ln(x+3) - x^2\big]_{-2}^{4} \\ &= \ln(4+3) - 4^2 - \big(\ln(-2+3) - (-2)^2\big) \\ &= \ln(7) - 16 - \big(\ln(1) - 4\big) \\ &= \ln(7) - 12\end{aligned}$$

IV Propriété de l'intégrale

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Démonstration

En effet, f étant continue sur I, elle admet une primitive F et on a :

$$\int_a^a f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Propriété - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$ et λ un réel.

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + g(x)\big)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(5x^2 + \frac{2}{x}\right) dx &= 5\int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 5\big[\ln(x)\big]_1^2 \\ &= 5\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + 2\left(\ln(2) - \ln(1)\right) \\ &= \frac{35}{3} + 2\ln(2)\end{aligned}$$

Démonstration

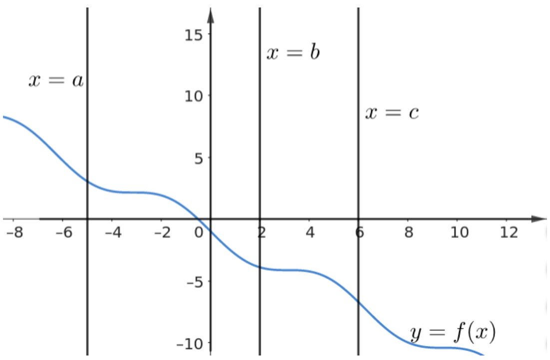
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$ et λ un réel.
Soient F une primitive de f et G une primitive de g sur $[a;b]$.
Dans ce cas $\lambda F + G$ est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout $x \in [a;b]$:
$(\lambda F + G)'(x) = \lambda F'(x) + G'(x)$

D'où : $$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda f(x) + g(x)\big) dx &= [\lambda F(x) + G(x)]_a^b \\ &= \lambda F(b) + G(b) - (\lambda F(a) + G(a)) \\ &= \lambda F(b) - \lambda F(a) + (G(b) - G(a)) \\ &= \lambda [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

Propriété - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I.
Pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Exemple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5}(x-1)dx &= \int_{-1}^{1}(x-1)dx + \int_{1}^{5}(x-1)dx\\ &= -\frac{2\times 2}{2} + \frac{4\times 4}{2}\\ &= -2+8\\ &= 6\end{aligned}$$

Remarque

D'après la relation de Chasles,

$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$

or $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

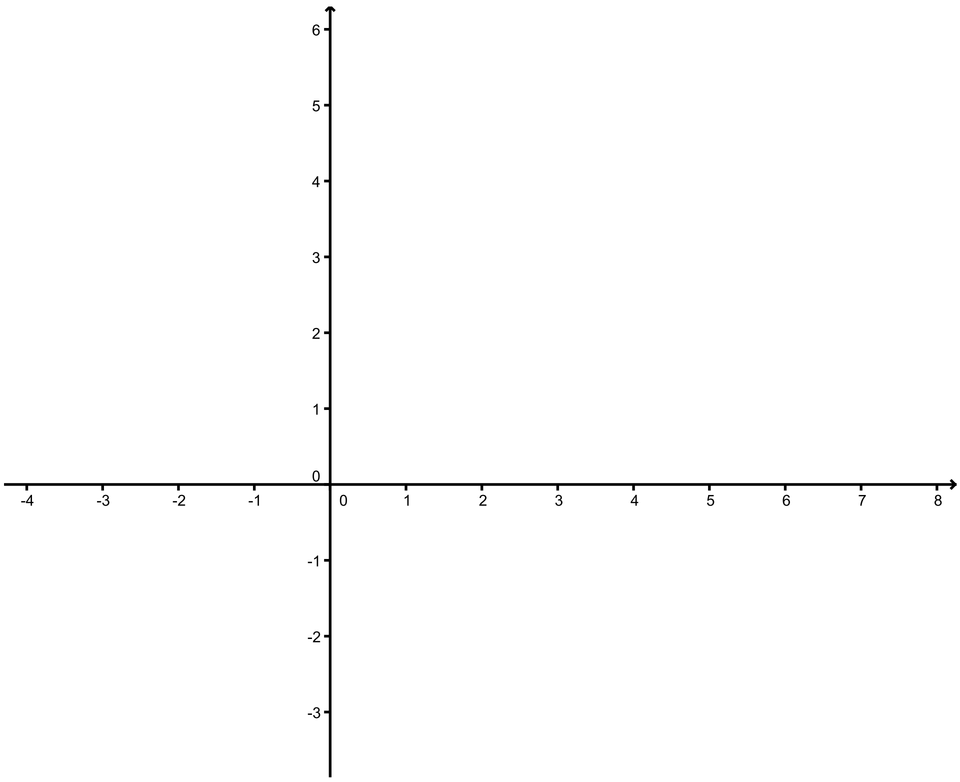
Donc $\displaystyle 0 = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$

C'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété - Conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$

- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$



V Intégration par parties

Propriété - Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$

$$\int_a^b \big(u'(x)\times v(x)\big)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x)\times v'(x))\,dx$$

Exemple

$\displaystyle\int_1^2 (x\ln(x))\,dx = \int_a^b \big(u'(x)\times v(x)\big)dx$

avec $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$

D'où $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x\ln(x))\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx\\ &= 2\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)-\int_1^2\frac{x}{2}dx\\ &= 2\ln(2)-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2\\ &= 2\ln(2)-\left(\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}\right)\\ &= 2\ln(2)-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Démonstration

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$.

Par dérivation d'un produit, $(u'v+uv')(x)=(uv)'(x)$.

d'où : $\displaystyle\int_a^b (u'v+uv')(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx$

$\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx$

Donc :

$\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b (uv')(x)dx$

et par conséquent :

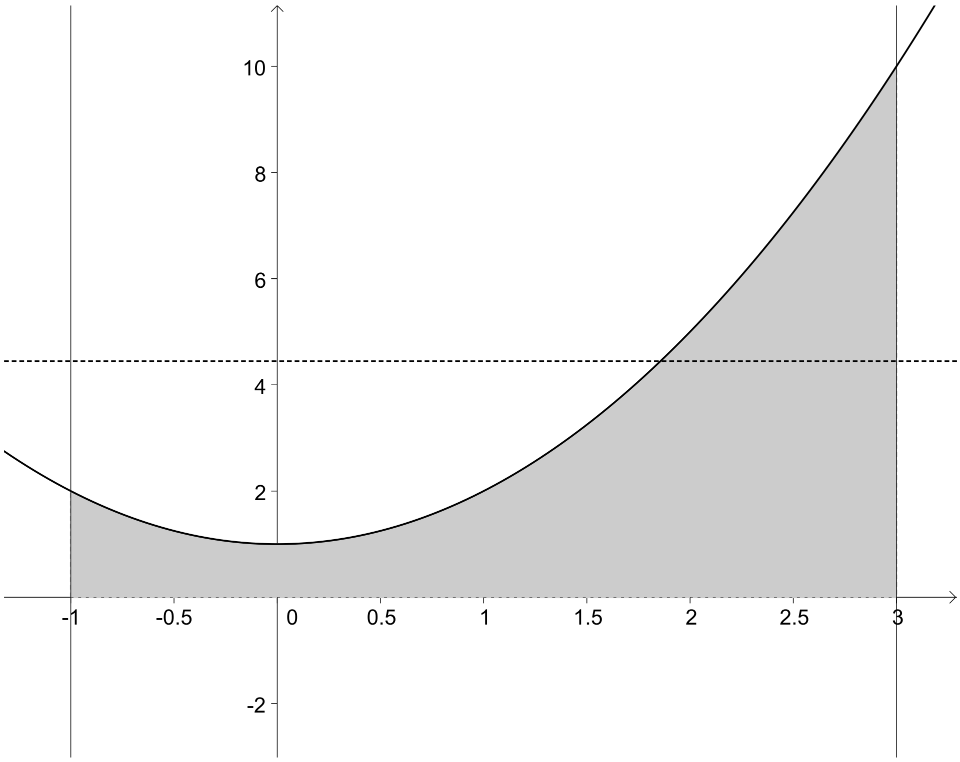
$\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)dx = \big[(uv)(x)\big]_a^b - \int_a^b (uv')(x)dx$

VI Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ de la fonction f est le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1; 7]$