Calcul d'intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-2}^{0} (2x^3 - x + 1)dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2t}dt$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{0} t(t^2 - 4)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4u+1}}du$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$$

1. Vérifier que $F: \quad x \mapsto (x+1)e^{\frac{-1}{x}}$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1}^{2} f(t)dt$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2 + 1}dt$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Justifier que f est dérivable et s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

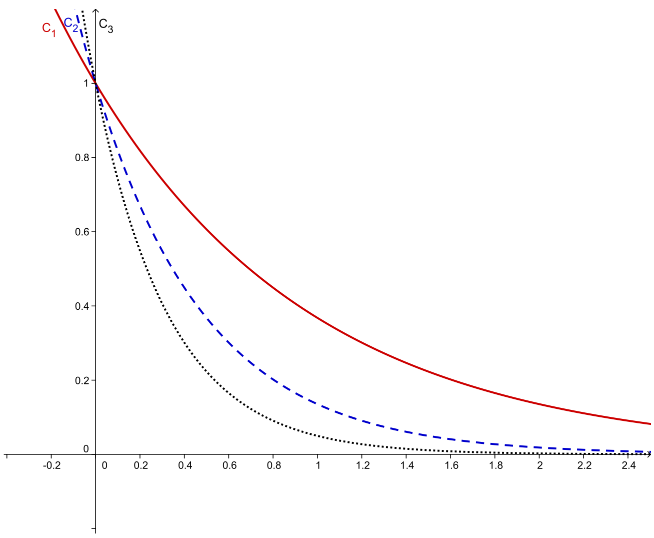
Exercice 4

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{2x}dx$

Exercice 5

On considère une famille de fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, continues et positives sur $\mathbb{R}$ et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_n$ dans un repère orthogonal du plan.
Ci-dessous, sont tracée les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
On définit :

$$I_n = \int_0^2 f_n(x)dx$$



1. Emettre, à l'aide du graphique une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n).
2. On précise que $f_n(x) = e^{-nx}$.
   (a) Calculer I_n et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   (b) Démontrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Exercice 6

Déterminer le signe de chacunes des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-3}^{1} x^2dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{10} -3\sqrt{x}dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^3dx$

Exercice 7

Vrai ou Faux.
Justifier vos réponses.

1. Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ telle que $\int_a^b f(t)dt > 0$, alors $f \geq 0$ sur $[a;b]$.
2. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$.
   Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$ alors pour tout x de $[0;1]$ on a $f(x) = g(x)$.

Exercice 8

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}dx$.

1. (a) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur $[0;1]$.
   (b) Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 (x+2)\mathrm{e}^{-x}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx$
   (a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $G : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction $g : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;1]$.
   En déduire J.
   (b) De la question 1-b, déduire que $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.
   (c) Démontrer que $J + K = 4I$
   (d) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right) dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(2t + \frac{1}{3}\right) dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3t^2}\right) dt$
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(2u + \frac{3u}{\sqrt{2u^2+3}}\right) du$
5. $\displaystyle\int_0^1 \left((2x+1) \times \mathrm{e}^{3x^2+3x}\right) dx$

Exercice 10

Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soient a, b et c trois réels avec $a > 0$.
   Que peut-on dire de ces trois réels si le polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est positif sur $\mathbb{R}$?
2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.
   Pour tout réel λ, on pose :

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt$$

   (a) Démontrer que P est un polynôme du second degré en la variable λ et exprimer ses coefficient à l'aide d'intégrales.

   (b) Démontrer que le polynôme P est positif sur $\mathbb{R}$

   (c) Utiliser alors la question 1 pour démontrer l ?inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right) \times \left(\int_a^b (g(t))^2\, dt\right)$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathcal{C}$, ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB].
Hachurer la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathcal{C}$.
On a placé les points D(a ; 0) et E(1 ; 0).
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée sur la figure est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $x \mapsto e^x(x-1)$ est une primitive de $x \mapsto xe^x$.
   En déduire que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$.
2. (a) Donner l'aire du triangle OAD et montrer que l'aire du trapèze ABED est :

$$\frac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$$

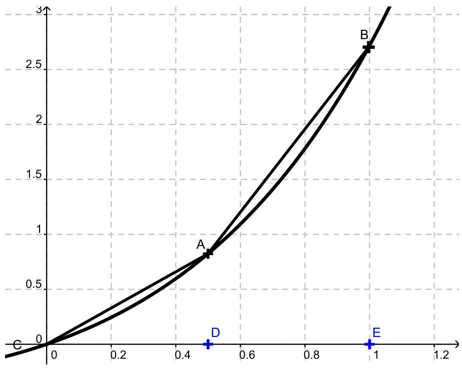
   (b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.



Exercice 12

La méthode de Monte-Carlo On se propose dans cet exercice de présenter une méthode permettant de calculer une valeur approchée d'une intégrale à l'aide de techniques probabilistes.

1. considérons l'algorithme donné en annexe.
   (a) Quelles sont les variables utilisées dans cet algorithme ?
   (b) Lors de chaque passage de la boucle, comment obtient-on les coordonnées x et y des points ?
   (c) Expliquer le principe de cet algorithme, et les résultats renvoyés lors de son exécution.
   (d) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel, et le faire fonctionner lorsque f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$.
2. On suppose dans cette question que f est une fonction définie sur $[0; 1]$, continue sur $[0; 1]$ et telle que pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.
   On dédigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et par I, J et K les points de coordonnées respectives $(1; 0)$, $(0; 1)$ et $(1; 1)$.
   On note enfin $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
   On admet que, lorsqu'on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré OIJK, la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$ est égale au rapport de l'aire de $\mathcal{D}$ sur celle du carré OIJK.
   (a) Comment peut-on interpréter la probabilité ci-dessus à l'aide d'une intégrale.
   (b) La valeur trouvée dans l'exemple est-elle en conformité avec le résultat.

(c) Modifier l'algorithme pour donner une valeur approchée de :

$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

```
import random as rnd

def f(x) :
    return x**2

def monteCarlo(n) :
    compteur = 0
    for i in range(1,n) :
        x = rnd.random()
        y = rnd.random()
        if y < f(x) :
            compteur = compteur + 1
    return compteur/n


Fonction numérique utilisée : f(x)=x^2
```

Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 (3x+2)\mathrm{e}^x dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 (3x)\mathrm{e}^{2x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^{-x} dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x dx$

Exercice 14

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x) dx$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2x+1)\ln(x) dx$

4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^2\,dx$

Exercice 15

Soit $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = 1 - 2I$.
2. En déduire la valeur de I
3. En déduire la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$ sur $[1; \mathrm{e}]$

Exercice 16

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } \ n \geqslant 1,\ \ f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. (a) On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   (b) Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n			$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

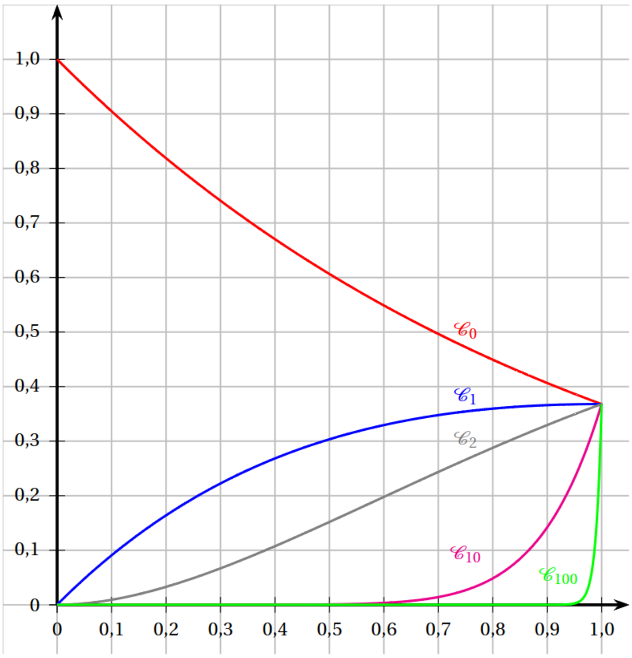
2. Justifier par le calcul que le point $\mathrm{A}(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1})$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0\,;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.



   (a) Donner une interprétation graphique de I_n.

   (b) Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. (a) Soit n un entier naturel.
   Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. (a) Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

(b) Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python. On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
  I = 1 - 1/e
  L = [I]
  for i in range(n):
      I = (i + 1)*I - 1/e
      L.append(I)
 return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?