Exercice 10

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 a) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

et :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 - 3L_2 \to L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{L_1}{2} \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \end{array}$$

donc $\boxed{(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = a + b + 1 \\ b = -2a + 4b + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -1 \\ 2a - 3b = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) On fait une démonstration par récurrence.

Initialisation :

$A^0 = I$ donc $V_0 = A^0 V_0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $V_n = A^n V_0$ pour l'entier n fixé.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= X_{n+1} - X \\ &= AX_n + B - (AX + B) \\ &= A(X_n - X) \\ &= A \cdot V_n \\ &= A \cdot A^n V_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} V_0 \end{aligned}$$

D'où l'hérédité

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = A^n V_0$

(4) a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $L_2 - L_1 \to L_2$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $L_1 - L_2 \to L_1$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $-L_2 \to L_2$

Donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

b) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

c) $D^n = P^{-1}A\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I}AP \cdot \ldots \cdot P^{-1}AP$

$= P^{-1}A^nP$

donc $A^n = PD^nP^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n & -3^n \\ 2^n & -2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2\times 3^n & -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}$

⑤ D'après les questions précédentes,

$V_n = A^n V$

donc $X_n - X = A^n(X_0 - X)$

$X_n = A^n(X_0 - X) + X$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $X_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n + 3(-2^n + 3^n) \\ 2^{n+1} - 2\times 3^n + 3(-2^n + 2\times 3^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n(2-3) + 3^n(-1+3) \\ 2^n(2-3) + 3^n(-2+6) - 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2^n + 2\times 3^n \\ -2^n + 4\times 3^n \end{pmatrix}$$

Donc $x_n = -2^n + 2\times 3^n$

et $y_n = -2^n + 4\times 3^n$

d'où

$$x_n = 3^n\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\right) \text{ et } y_n = 3^n\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4\right)$$

$-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 = 2 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 = 4$$

$3 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty}$$