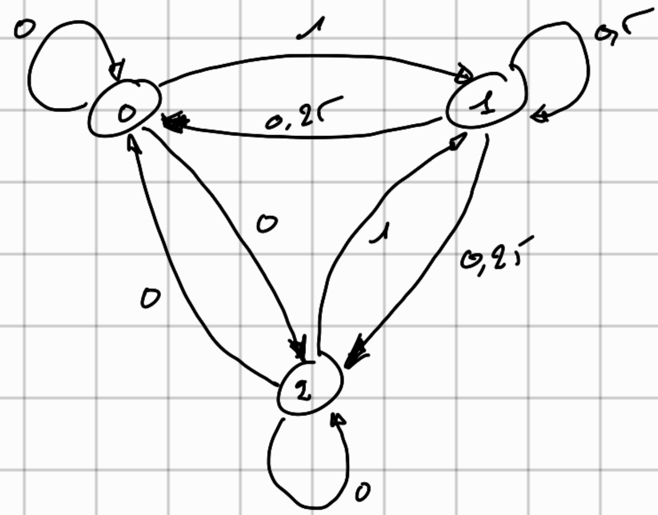
Exercice 9

① a) $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il n'y ait qu'une seule boule blanche dans l'urne U après le $(n+1)^{ième}$ tirage sachant qu'il n'y en avait qu'une après le $n^{ième}$ tirage.

- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=0$; $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$; $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=0$
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=0{,}25$; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=0{,}5$; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=0{,}25$
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0$; $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1$; $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0$

b)



② a)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $R_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $R_{n+1}=R_n\times M$

Donc

$$R_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On démontre par récurrence sur $\mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$: " $R_n = R_0 \cdot M^n$ "

<u>Initialisation</u>

$$R_0 M^0 = R_0 I_3 = R_0$$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est à dire que pour l'entier n fixé, on a :

$$R_n = R_0 \cdot M^n$$

or $R_{n+1} = R_n \times M$

donc $R_{n+1} = R_0 \cdot M^n \times M$

$$= R_0 M^{n+1}$$

d'où l'hérédité.

<u>Conclusion</u> :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_0 M^n$

③ a) $P \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= I$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $D = P^{-1} M P$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On effectue une démonstration par récurrence

<u>Initialisation</u>

$D^1 = D$ et $\begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

d'où l'initialisation pour $n = 1$

<u>Hérédité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a alors :

$$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'hérédité.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $D = P^{-1} M P$ donc $P D P^{-1} = M$, d'où

$$M^n = \prod_{k=1}^{n} P D P^{-1}$$

$$= PD \left(\prod_{k=1}^{n-1} P^{-1} P D \right) \times P^{-1}$$

$$= PD \left(\prod_{k=1}^{n-1} D \right) \times P^{-1}$$

$$= P D\, D^{n-1} P^{-1}$$

$$= P D^n P^{-1}$$

$\prod$ est le symbole pour les produits

$$\prod_{k=1}^{3} (2k+1) = (2+1) \times (4+1) \times (6+1) = \dots$$

Remarque : On peut aussi faire une démonstration par recurrence.

④ a) $M^n = P D^n P^{-1}$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 4 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 4 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}$$

b) $R_n = R_0 M^n$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . M^n$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+4 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 \end{pmatrix}$

5) $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$