

les nombres

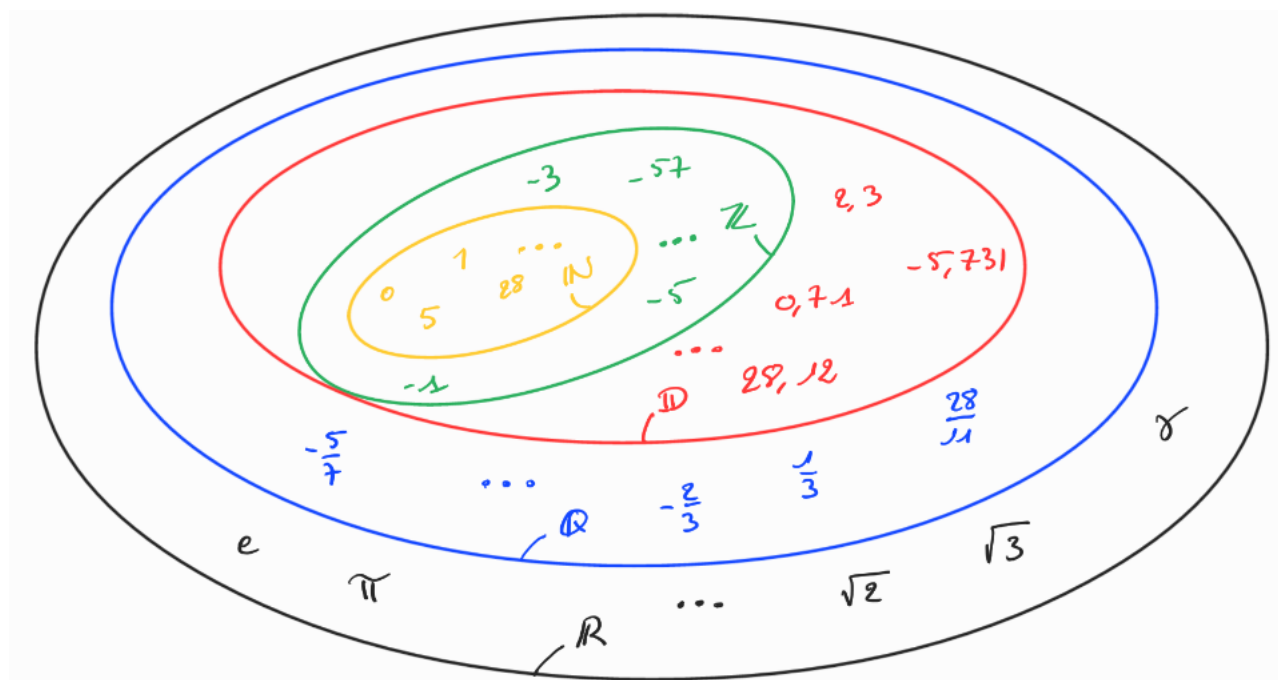
1 Ensemble de nombres



Définition

Il existe en seconde 5 ensembles de nombres :

- Les entiers naturels (noté $\mathbb{N}$) $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5...\}$
- Les entiers relatifs (noté $\mathbb{Z}$) $\mathbb{Z} = \{...\; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$
- Les nombres décimaux (noté $\mathbb{D}$)
- Les nombres rationnels (noté $\mathbb{Q}$), c'est tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction)
- Les nombres réels (noté $\mathbb{R}$) (Tous les nombres qui existent)



Remarque

L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire que tout entiers naturel est un entier relatif. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2 Entiers relatifs



Définitions

- On dit qu'un entier relatif m est un **multiple** de l'entier relatif d si il existe un autre entier relatif k tel que $m = k \times d$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un **diviseur** de m . On dit aussi que m est divisible par d .
- On dit qu'un entier relatif p est un nombre **pair** si c'est un multiple de 2. c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$
- Un entier relatifs i est **impair** si c'est un entier relatif qui n'est pas pair, c'est à dire qu'il n'est pas divisible par 2 ou encore qu'il existe un entier relatif k tel que $i = 2k + 1$.



Exemples



Propriété

La somme de deux multiples d'un entier relatif a est aussi un multiple de a



Exemples

Démonstration



Propriétés

- Le carré d'un nombre pair est pair.
- Le carré d'un nombre impair est impair

Démonstration

Démontrons seulement la seconde propriété, c'est à dire que le carré d'un nombre impair est impair.





Définitions

- On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun positif est 1.
- Un nombre premier est un entier naturel qui n'a que deux diviseurs positifs distincts, 1 et lui-même. L'ensemble $\mathbb{P}$ infini. $\mathbb{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23...\}$.



Exemples



Propriété

On admet que tout entier relatif peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.



Exemples

- $56 = 8 \times 7 = 4 \times 2 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ où 2 et 7 sont des nombres premiers.
- $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$ où 2 et 3 sont des nombres premiers.

3 Nombres décimaux et rationnels



Définition

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ où a est un entier relatif et k un entier naturel.



Exemples

Remarque

Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale, par exemple $\frac{1}{3}$.

Démonstration

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Exemples

Propriété

Pour tout nombre rationnel non nul r , il existe un unique entier relatif p et un unique entier naturel non nul q tel que p et q sont premiers entre eux et $r = \frac{p}{q}$

$\frac{p}{q}$ est alors appelée forme irréductible de r



Exemple

$\frac{84}{36} = \frac{42}{18} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ où 7 et 3 sont premiers entre eux, donc $\frac{7}{3}$ est la forme irréductible de $\frac{84}{36}$.

4 Nombres réels

Remarque

Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction, par exemple $\sqrt{2}, \pi, \dots$. Quand l'on complète l'ensemble des rationnels par ces nombres, on obtient l'ensemble des nombres réels. C'est à dire tous les nombres qui existent.

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on a besoin de la propriété suivante :

Propriété

 Soit p un entier naturel.
 si 2 divise p^2 , alors 2 divise p .

Démonstration



Propriété

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, on dit qu'il est irrationnel.



Démonstration

Démontrons maintenant par l'absurde que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction. Supposons que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous forme rationnel, c'est à dire qu'il deux entiers relatifs p et q premier entre eux tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

5 Puissance d'un nombre réel



Définition

Soit n et p deux entiers naturels et a un réel.

- $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ ou l'on a n facteurs a
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times a \times \dots \times a}$ ou l'on a n facteurs a au dénominateur.



Exemples

♥ Propriétés

Pour tout nombre réel a et pour tout entier naturel n et p , on a :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n \times p}$
- $a^0 = 1$

💡 Exemples

♥ Propriétés

Pour tout nombre réel a et b et pour tout entier naturel n et p , on a :

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- avec $b \neq 0$, on a $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$
- avec $b \neq 0$, on a $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

💡 Exemples

6 Racine carré

📖 Définition

Soit a un réel supérieur ou égale à 0.

La racine carré de a (noté $\sqrt{a}$) est l'unique réel positif ou nul qui élevé au carré donne a . C'est à dire :

$$\sqrt{a}^2 = a$$

💡 Exemples

- $3^2 = 9$ et $3 \geq 0$, donc $\sqrt{9} = 3$
- $7^2 = 49$ et $7 \geq 0$, donc $\sqrt{49} = 7$

♥ Propriétés

Pour tout nombre réel a et b positifs, on a :

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
2. avec $b \neq 0$, on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

💡 Exemples

🔪 Démonstration

soit a et b deux réels positifs.

1. $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2$ d'après les règles sur les puissances
 $= ab$

Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est le nombre qui élevé au carré est égale à ab , d'où $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$

2. avec $b \neq 0$, on a :