

les nombres

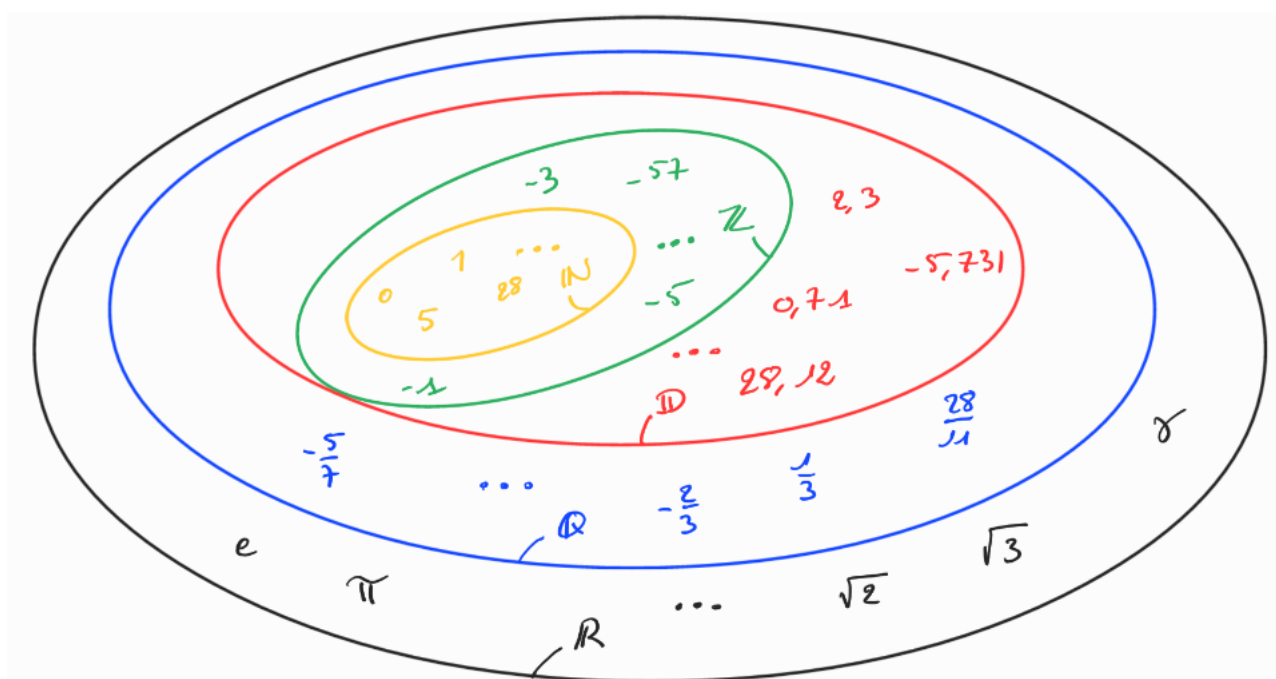
1 Ensemble de nombres



Définition

Il existe en seconde 5 ensembles de nombres :

- Les entiers naturels (noté $\mathbb{N}$) $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5...\}$
- Les entiers relatifs (noté $\mathbb{Z}$) $\mathbb{Z} = \{...; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$
- Les nombres décimaux (noté $\mathbb{D}$)
- Les nombres rationnels (noté $\mathbb{Q}$), c'est tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction)
- Les nombres réels (noté $\mathbb{R}$) (Tous les nombres qui existent)



Remarque

L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire que tout entiers naturel est un entier relatif. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pour indiquer que $\frac{1}{3}$ appartient à l'ensemble des rationnels, on écrit $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

2 Entiers relatifs



Définitions

- On dit qu'un entier relatif m est un **multiple** de l'entier relatif d si il existe un autre entier relatif k tel que $m = k \times d$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un **diviseur** de m . On dit aussi que m est divisible par d .
- On dit qu'un entier relatif p est un nombre **pair** si c'est un multiple de 2. c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$
- Un entier relatifs i est **impair** si c'est un entier relatif qui n'est pas pair, c'est à dire qu'il n'est pas divisible par 2 ou encore qu'il existe un entier relatif k tel que $i = 2k + 1$.



Exemples

- 12 est un multiple de 4 car $12 = 4 \times 3$. De ce fait, on peut aussi dire que 4 est un diviseur de 12. Cet exemple montre aussi que 3 est un autre diviseur de 12.
- 32 est un nombre pair car 32 est divisible par 2, en effet, $32 = 2 \times 16$
- 5 est un nombre impair, en effet, $5 = 2 \times 2 + 1$
- 3 et 7 sont premiers entre eux



Propriété

La somme de deux multiples d'un entier relatif a est aussi un multiple de a



Exemples

- 33 et 110 sont deux multiples de 11, donc $33 + 110 = 143$ est aussi un multiple de 11.
- 700 et -35 sont deux multiples de 7, donc $700 - 35 = 665$ est aussi un multiple de 7.



Démonstration

Soit a un entier relatif.

Soient b et c deux multiples de a , donc, d'après la définition d'un multiple, il existe deux entiers relatifs m et n tels que $b = m \times a$ et $c = n \times a$.

On a donc $b + c = m \times a + n \times a = (m + n) \times a$

Donc $b + c$ est un multiple de a .



Propriétés

- Le carré d'un nombre pair est pair.
- Le carré d'un nombre impair est impair



Démonstration

Démontrons seulement la seconde propriété, c'est à dire que le carré d'un nombre impair est impair.

Soit n un entier relatif impair, donc, d'après la définition, il existe un entiers relatifs k tel que $n = 2k + 1$.

On a donc : $n^2 = n \times n$

$$= (2k + 1) \times (2k + 1)$$

$$= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \quad \text{en utilisant la double distributivité.}$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \text{en factorisant par 2 les deux premiers termes} \\
 &= 2m + 1 \quad \text{avec } m = 2k^2 + 2k
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition d'un nombre impair, n^2 est impair.



Définitions

- On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun positif est 1.
- Un nombre premier est un entier naturel qui n'a que deux diviseurs positifs distincts, 1 et lui-même. L'ensemble $\mathbb{P}$ infini. $\mathbb{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 \dots\}$.



Exemples

- 9 et 14 sont premiers entre eux car leurs seul diviseur commun positif est 1.
- 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux car ils ont 2 en diviseur commun positif.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur positif qui est 1.



Propriété

On admet que tout entier relatif peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.



Exemples

- $56 = 8 \times 7 = 4 \times 2 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ où 2 et 7 sont des nombres premiers.
- $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$ où 2 et 3 sont des nombres premiers.

3 Nombres décimaux et rationnels



Définition

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ où a est un entier relatif et k un entier naturel.



Exemples

- $2,7 = \frac{27}{10}$
- $-53,28 = \frac{-5328}{10^2}$
- $3 = \frac{3}{1} = \frac{3}{10^0}$

Remarque

Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale, par exemple $\frac{1}{3}$.

Démonstration

Démontrons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous forme décimale.

Supposons que $\frac{1}{3}$ puisse s'écrire sous forme décimale, c'est à dire qu'il existe un entier relatif a et un entier naturel k tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$.

On a alors $a = \frac{10^k}{3}$, où encore que $3a = 10^k$, c'est à dire que 3 est un diviseur de 10^k , ce qui est faux.

Donc $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous forme décimale

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Exemples

- $3,47 = \frac{347}{100}$
- $-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-3}{1}$

Propriété

Pour tout nombre rationnel non nul r , il existe un unique entier relatif p et un unique entier naturel non nul q tel que p et q sont premiers entre eux et $r = \frac{p}{q}$

$\frac{p}{q}$ est alors appelée forme irréductible de r

Exemple

$\frac{84}{36} = \frac{42}{18} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ où 7 et 3 sont premiers entre eux, donc $\frac{7}{3}$ est la forme irréductible de $\frac{84}{36}$.

Remarque

Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction, par exemple $\sqrt{2}, \pi, \dots$. Quand l'on complète l'ensemble des rationnels par ces nombres, on obtient l'ensemble des nombres réels. C'est à dire tous les nombres qui existent.

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on a besoin de la propriété suivante :

Propriété

Soit p un entier naturel.
 si 2 divise p^2 , alors 2 divise p .

Démonstration

Soit p un entier naturel. Pour démontrer que si 2 divise p^2 , alors 2 divise p , on va faire une démonstration par contraposition. c'est à dire que l'on va démontrer que si 2 ne divise pas p , alors 2 ne divise pas p^2 .

Supposons que 2 ne divise pas p .

Dans ce cas, p est impair et par conséquent p^2 est aussi impair, donc 2 ne divise pas p^2 .

D'où si 2 divise p^2 , alors 2 divise p .

Propriété

 $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, on dit qu'il est irrationnel.

Démonstration

Démontrons maintenant par l'absurde que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

Supposons que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous forme rationnel, c'est à dire qu'il deux entiers relatifs p et q premier entre eux tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On a alors $2 = \frac{p^2}{q^2}$, où encore que $2q^2 = p^2$, donc 2 est un diviseur de p^2 et par conséquent 2 est un diviseur de p et par conséquent 4 est diviseur de p^2 , donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 = 4k$, d'où,

$$2q^2 = 4k$$

en divisant par deux chaque membre de l'égalité, on obtient $q^2 = 2k$

donc 2 divise q^2 et par conséquent 2 divise q d'après la démonstration préliminaire. Dans ce cas, 2 est un diviseur commun de p et q et par conséquent, p et q ne sont pas premiers entre eux, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Donc $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

5 Puissance d'un nombre réel



Définition

Soit n et p deux entiers naturels et a un réel.

- $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ ou l'on a n facteurs a
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times a \times \dots \times a}$ ou l'on a n facteurs a au dénominateur.



Exemples

- $7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 16807$
- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$



Propriétés

Pour tout nombre réel a et pour tout entier naturel n et p , on a :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n \times p}$
- $a^0 = 1$



Exemples

- $5^4 \times 5^3 = 5^{4+3} = 5^7$
- $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$
- $(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6$



Propriétés

Pour tout nombre réel a et b et pour tout entier naturel n et p , on a :

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- avec $b \neq 0$, on a $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$
- avec $b \neq 0$, on a $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$



Exemples

- $5^4 \times 3^4 = (5 \times 3)^4 = 15^4$
- $\frac{10^7}{2^7} = \left(\frac{10}{2}\right)^7 = 5^7$



Définition

Soit a un réel supérieur ou égale à 0.

La racine carré de a (noté $\sqrt{a}$) est l'unique réel positif ou nul qui élevé au carré donne a . C'est à dire :

$$\sqrt{a}^2 = a$$



Exemples

- $3^2 = 9$ et $3 \geq 0$, donc $\sqrt{9} = 3$
- $7^2 = 49$ et $7 \geq 0$, donc $\sqrt{49} = 7$



Propriétés

Pour tout nombre réel a et b positifs, on a :

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
2. avec $b \neq 0$, on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



Exemples

- $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$



Démonstration

soit a et b deux réels positifs.

1. $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2$ d'après les règles sur les puissances
 $= ab$

Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est le nombre qui élevé au carré est égale à ab , d'où $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$

2. avec $b \neq 0$, on a :