

Suites, préparation au DS 1

Correction de l'exercice 1

1. Démonstration par récurrence.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_1 &= 4u_0 + 6 = 4 \times 1 + 6 = 10 \\ u_2 &= 4u_1 + 6 = 46. \end{aligned}$$

(b) Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = 5 \times 4^n - 2"$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $5 \times 4^0 - 2 = 5 - 2 = 3$, donc $u_0 = 5 \times 4^0 - 2$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour l'entier k fixé. C'est à dire que $u_k = 5 \times 4^k - 2$
D'où :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4u_k + 6 && \text{par définition de la suite} \\ &= 4(5 \times 4^k - 2) + 6 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 5 \times 4^{k+1} - 8 + 6 \\ &= 5 \times 4^{k+1} - 2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 4u_n + 6 + 2 \\ &= 4u_n + 8 \\ &= 4(u_n + 2) \\ &= 4w_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = u_0 + 2 = 3 + 2 = 5$.

(b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = 5$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 5 \times 4^n$$

(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$w_n = u_n + 2$ donc $u_n = w_n - 2$ et par conséquent :

$$u_n = 5 \times 4^n - 2$$

Correction de l'exercice 2

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad u_1 = \frac{3u_0 - 1}{4u_0 - 1} = \frac{5}{3}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 - 1}{4u_1 - 1} = \frac{3 \times \frac{5}{3} - 1}{4 \times \frac{5}{3} - 1} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2} = 6.$$

(b) Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = \frac{3n+2}{6n+1}"$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $\frac{3 \times 0 + 2}{6 \times 0 + 1} = 2$, donc $u_0 = \frac{3 \times 0 + 2}{6 \times 0 + 1}$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour l'entier k fixé. C'est à dire que $u_k = \frac{3k+2}{6k+1}$

D'où :

$$u_{k+1} = \frac{3u_k - 1}{4u_k - 1} \quad \text{par définition de la suite}$$

$$= \frac{3 \times \frac{3k+2}{6k+1} - 1}{4 \times \frac{3k+2}{6k+1} - 1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{9k+6 - (6k+1)}{12k+8 - (6k+1)}$$

$$= \frac{3k+5}{6k+7}$$

$$= \frac{3(k+1) + 2}{6(k+1) + 1}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{2}{2u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{2}{2 \times \frac{3u_n - 1}{4u_n - 1} - 1} \\ &= \frac{8u_n - 2}{6u_n - 2 - (4u_n - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8u_n - 2}{2u_n - 1} \\
\text{d'où :} \\
w_{n+1} - w_n &= \frac{8u_n - 2}{2u_n - 1} - \frac{2}{2u_n - 1} \\
&= \frac{8u_n - 4}{2u_n - 1} \\
&= \frac{4 \times (2u_n - 1)}{2u_n - 1} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme

$$w_0 = \frac{2}{2u_0 - 1} = \frac{2}{3}.$$

- (b) La suite (w_n) étant une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $w_0 = \frac{2}{3}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{2}{3} + 4n$$

- (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \frac{2}{2u_n - 1} \text{ donc } w_n \times (2u_n - 1) = 2 \text{ d'où } u_n \times 2w_n - w_n = 2 \text{ et par conséquent :}$$

$$u_n = \frac{2 + w_n}{2w_n}, \text{ donc}$$

$$u_n = \frac{2 + \frac{2}{3} + 4n}{2 \times \left(\frac{2}{3} + 4n\right)}$$

$$u_n = \frac{12n + 4}{24n + 4}$$

$$u_n = \frac{3n + 1}{6n + 1}$$

Correction de l'exercice 3

1. Démonstration par récurrence

$$(a) \quad u_1 = \frac{u_0 + 2}{u_0} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 2}{u_1} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{u_2 + 2}{u_2} = \frac{\frac{5}{3} + 2}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{5}$$

- (b) On va démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n > 0$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et par conséquent $u_0 > 0$, donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour l'entier n fixé. C'est à dire que $u_n > 0$

Dans ce cas $2 + u_n > 0$ et par conséquent $u_{n+1} > 0$ en tant que quotient de deux nombre strictement positifs.

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (c) On va démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $\frac{2^{0+2} - (-1)^0}{2^{0+1} + (-1)^0} = \frac{4 - 1}{2 + 1} = 1$

Donc $u_0 = \frac{2^{0+2} - (-1)^0}{2^{0+1} + (-1)^0}$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour l'entier n fixé. C'est à dire que $u_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \frac{u_n + 2}{u_n} && \text{d'après la définition de la suite } (u_n) \\
 &= \frac{\frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n} + 2}{\frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{\frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n} + \frac{2 \times (2^{n+1} + (-1)^n)}{2^{n+1} + (-1)^n}}{\frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}} \\
 &= \frac{2^{n+2} - (-1)^n + 2 \times (2^{n+1} + (-1)^n)}{2^{n+2} - (-1)^n} \\
 &= \frac{2^{n+2} - (-1)^n + 2^{n+2} + 2 \times (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n 2^{n+2} - (-1)^n} \\
 &= \frac{2 \times 2^{n+2} + (-1)^n}{2^{n+2} - (-1)^n} \\
 &= \frac{2^{n+3} - (-1)^{n+1}}{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir de $n = 0$, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Autre méthode :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} \\
 &= \frac{\frac{u_n + 2}{u_n} - 2}{\frac{u_n + 2}{u_n} + 1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{u_n + 2}{u_n} - \frac{2u_n}{u_n}}{\frac{u_n + 2}{u_n} + \frac{u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{\frac{-u_n + 2}{u_n}}{\frac{2u_n + 2}{u_n}}$$

$$= \frac{-u_n + 2}{2u_n + 2}$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

$$= \frac{-1}{2} w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{-1}{2}$

3. (w_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{-1}{2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \circ \quad w_n &= w_0 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\circ \quad \text{On sait que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } w_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1},$$

$$\text{d'où } w_n \times (u_n + 1) = u_n - 2$$

$$u_n \times w_n - u_n = -w_n - 2$$

$$u_n \times (w_n - 1) = -w_n - 2$$

$$u_n = \frac{-w_n - 2}{w_n - 1}$$

$$u_n = \frac{w_n + 2}{1 - w_n}$$

$$u_n = \frac{1 - w_n}{1 - w_n}$$

$$\text{Donc : } u_n = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} + 2}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}$$

$$\boxed{u_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}}$$