

Suites, préparation au DS 1

Exercice 1

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 6 \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence.

(a) Calculer u_1 et u_2 .

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 5 \times 4^n - 2$$

2. On souhaite retrouver le résultat précédent en utilisant une autre méthode.

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + 2$

(a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison 4.

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n .

(c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{4u_n - 1} \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence.

(a) Calculer u_1 et u_2 .

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{3n + 2}{6n + 1}$$

2. On souhaite retrouver le résultat précédent en utilisant une autre méthode.

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{2}{2u_n - 1}$

- (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{2}{3}$.
- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n .
- (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 3

Exercice difficile

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n} \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence.

- (a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $u_n > 0$
- (c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}$$

2. On souhaite retrouver le résultat précédent en utilisant une autre méthode.

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

- (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n .
- (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n .