

TERMINALE - DS DU 31 AOUT

2026-2027



Correction de l'exercice 1

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad \boxed{u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10}$$
$$\boxed{u_2 = 3u_1 + 1 = 31}.$$

(b) Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}"$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $\frac{7}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$, donc $u_0 = \frac{7}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2}$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour l'entier k fixé. C'est à dire que $u_k = \frac{7}{2} \times 3^k - \frac{1}{2}$

D'où :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k + 1 && \text{par définition de la suite} \\ &= 3 \left(\frac{7}{2} \times 3^k - \frac{1}{2} \right) + 1 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{7}{2} \times 3^{k+1} - \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{2} \times 3^{k+1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= 3u_n + 1 + \frac{1}{2} \\ &= 3u_n + \frac{3}{2} \\ &= 3 \left(u_n + \frac{1}{2} \right) \\ &= 3w_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } 3}$ et de premier terme $\boxed{w_0 = u_0 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}}$.

(b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = \frac{7}{2}$, on a pour tout

 $n \in \mathbb{N} :$

$$w_n = \frac{7}{2} \times 3^n$$

(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$w_n = u_n + \frac{1}{2}$ donc $u_n = w_n - \frac{1}{2}$ et par conséquent :

$$u_n = \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$