

Suites, préparation au DS 2

Correction de l'exercice 1

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad u_1 = \frac{4u_0}{2u_0 + 1} = \frac{12}{7}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{2u_n + 1} \text{ d'une part.}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{2u_n + 1} &= \frac{2(2u_n + 1)}{2u_n + 1} - \frac{2}{2u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n + 2 - 2}{2u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a bien } u_{n+1} = 2 - \frac{2}{2u_n + 1}$$

ii. Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{12}{7}$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour l'entier k fixé. C'est à dire que :

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_k$$

D'où :

$$0 \leq 2u_{k+1} \leq 2u_k$$

$$1 \leq \frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1} \leq \frac{2u_k}{2u_k + 1}$$

$$1 \geq \frac{1}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1}} \geq \frac{1}{\frac{2u_k}{2u_k + 1}} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$-2 \leq -\frac{2}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1}} \leq -\frac{2}{\frac{2u_k}{2u_k + 1}}$$

$$0 \leq 2 - \frac{2}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1}} \leq 2 - \frac{2}{\frac{2u_k}{2u_k + 1}}$$

$$0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante.

2. Formule explicite.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}}{2u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{2 \frac{4u_n}{2u_n + 1}}{2 \frac{4u_n}{2u_n + 1} - 3} \\ &= \frac{8u_n}{8u_n - 3(2u_n + 1)} \\ &= \frac{8u_n}{2u_n - 3} \\ &= 4 \times \frac{2u_n}{2u_n - 3} \\ &= 4 \times w_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme

$$w_0 = \frac{2u_0}{2u_0 - 3} = \frac{6}{3} = 2.$$

(b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = 2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 2 \times 4^n$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2u_n}{2u_n - 3} \\ \text{d'où } w_n \times (2u_n - 3) &= 2u_n \\ \text{donc } 2w_n u_n - 3w_n &= 2u_n \\ \text{donc } 2w_n u_n - 2u_n &= 3w_n \\ \text{donc } u_n(2w_n - 2) &= 3w_n \end{aligned}$$

et par conséquent $u_n = \frac{3w_n}{2w_n - 2}$

ii. D'après les questions précédentes, on a :

$$u_n = \frac{6 \times 4^n}{4^{n+1} - 2}$$

 Correction de l'exercice 2

 Correction de l'exercice 3