

Préparation DS 3

Correction.

Exercice 1

① Affirmation 1 : **FAUX**

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 + 2}{2\omega_0 + 3} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{4 \times 1 + 1}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{donc } \omega_1 \neq \frac{4 \times 1 + 1}{1 + 1}$$

② Affirmation 2 : **VERITÉ**

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2n+1}{n+1}$

On a alors :

$$v_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1+1} = \frac{2n+3}{n+2} \text{ d'une part.}$$

D'autre part :

$$\frac{v_n - 4}{v_n - 3} = \frac{\frac{2n+1}{n+1} - 4}{\frac{2n+1}{n+1} - 3} = \frac{2n+1 - 4n - 4}{2n+1 - 3n - 3} = \frac{-2n - 3}{-n - 2} = \frac{2n+3}{n+2} = v_{n+1}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{v_n - 4}{v_n - 3}. \text{ Or plus } v_0 = \frac{2 \times 0 + 1}{0 + 1} = 1$$

Donc (v_n) et (ω_n) sont deux suites ayant le même premier terme et suivant la même relation de récurrence, donc $\omega_n = v_n$

③ Affirmation 3 : **FAUX**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$\text{donc } \frac{-1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n+1} = 0$ et par conséquent, (v_n) converge

④ Affirmation 4 : VRAIE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

or $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$
avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$

Donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$

⑤ Affirmation 5 : VRAIE

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{2^n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{4^n \left(\frac{1}{4^n} + 1 \right)}$$

$$u_n = \left(\frac{2}{4}\right)^n \frac{1 - \frac{5}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 - \frac{5}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$

car $1 < 2$ et $1 < 4$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{5}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \right) = 1$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

⑥ Affirmation 6 : FAUX

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{2^n - 6^n}{1 + 4^n}$$

$$= \frac{6^n \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right)}{4^n \left(\frac{1}{4^n} + 1 \right)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\text{car } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ et } -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = -1$$

$$\text{De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \text{ car } 1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc, par produit, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$$

⑦ Affirmation 7 : VRAIE

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{n+1} - 1) = +\infty \text{ car } 1 < 2$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty}$$

⑧ Affirmation 8 : FAUX

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k > 0 \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k > u_0$$

avec $u_0 = 1$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k \geq 1$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k > 1$

Exercice 2

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$-n^3 + 3n + 1 = n^3 \left(-1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = -1$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 3n + 1) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} -2n^3 = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} -3n = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^3 - 3n - 1) = -\infty$$

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{5n^2 + n + 2}{2n^4 - \sqrt{n}} &= \frac{n^2 \left(5 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^4 \left(2 - \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} \right)} \\ &= \frac{5 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 5$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \left(2 - \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} \right) \right) = +\infty$$

Donc par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + n + 2}{2n^4 - \sqrt{n}} = 0}$$

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{n} + 1}{4\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{4\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{4\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ donc}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{4\sqrt{n+1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

⑤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{2n + \sqrt{n} - 1}{3n\sqrt{n} + 2} &= \frac{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3\sqrt{n} + \frac{2}{n} \right)} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}}{3\sqrt{n} + \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right) &= 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3\sqrt{n} + \frac{2}{n} \right) &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + \sqrt{n} - 1}{3n\sqrt{n} + 2} = 0}$$