

Suites, préparation au DS 2

Correction de l'exercice 1

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad \boxed{u_1 = \frac{4u_0}{2u_0 + 1} = \frac{12}{7}}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{2u_n + 1} &= \frac{2(2u_n + 1)}{2u_n + 1} - \frac{2}{2u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n + 2 - 2}{2u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

$$\text{or } u_{n+1} = \frac{4u_n}{2u_n + 1}$$

$$\text{Donc on a bien } \boxed{u_{n+1} = 2 - \frac{2}{2u_n + 1}}$$

ii. Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{12}{7}$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour l'entier k fixé. C'est à dire que :

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_k$$

D'où :

$$0 \leq 2u_{k+1} \leq 2u_k$$

$$1 \leq \frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1} + 1 \leq \frac{2u_k}{2u_k + 1} + 1$$

$$1 \geq \frac{1}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1} + 1} \geq \frac{1}{\frac{2u_k}{2u_k + 1} + 1} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$-2 \leq -\frac{2}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1} + 1} \leq -\frac{2}{\frac{2u_k}{2u_k + 1} + 1}$$

$$0 \leq 2 - \frac{2}{\frac{2u_{k+1}}{2u_{k+1} + 1} + 1} \leq 2 - \frac{2}{\frac{2u_k}{2u_k + 1} + 1}$$

$$0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir de ce rang, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante.

2. Formule explicite.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}}{2u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{2 \frac{4u_n}{2u_n + 1}}{2 \frac{4u_n}{2u_n + 1} - 3} \\ &= \frac{8u_n}{8u_n - 3(2u_n + 1)} \\ &= \frac{8u_n}{2u_n - 3} \\ &= 4 \times \frac{2u_n}{2u_n - 3} \\ &= 4 \times w_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme

$$w_0 = \frac{2u_0}{2u_0 - 3} = \frac{6}{3} = 2.$$

(b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = 2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 2 \times 4^n$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2u_n}{2u_n - 3} \\ \text{d'où } w_n \times (2u_n - 3) &= 2u_n \\ \text{donc } 2w_n u_n - 3w_n &= 2u_n \\ \text{donc } 2w_n u_n - 2u_n &= 3w_n \\ \text{donc } u_n(2w_n - 2) &= 3w_n \end{aligned}$$

et par conséquent
$$u_n = \frac{3w_n}{2w_n - 2}$$

ii. D'après les questions précédentes, on a :

$$u_n = \frac{6 \times 4^n}{4^{n+1} - 2}$$

Correction de l'exercice 2

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 8}$$

$$= \frac{3}{11}$$

(b) Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ donc $0 < u_0$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour l'entier n fixé. C'est à dire que :

$$0 < u_n$$

D'où :

$$0 < u_n + 8$$

$$\text{Donc : } 0 < \frac{u_n}{u_n + 8} \quad \text{par quotient de deux nombres strictement positifs}$$

Donc $0 < u_{n+1}$ et par conséquent $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir de ce rang, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$$

$$\text{d'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n + 8}$$

or $u_n + 8 > 1$ car $u_n > 0$ donc $\frac{1}{u_n + 8} < 1$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et par conséquent la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 + \frac{7}{u_n}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n + 8}}$$

$$= 1 + \frac{7 \times (u_n + 8)}{u_n}$$

$$= 1 + 7 \times \frac{u_n}{u_n} + 8 \times \frac{7}{u_n}$$

$$= 8 + 8 \times \frac{7}{u_n}$$

$$= 8 \times \left(1 + \frac{7}{u_n}\right)$$

$$= 8 \times w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$ et de raison 8.

- (b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $w_0 = \frac{10}{3}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{10}{3} \times 8^n$$

- (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = 1 + \frac{7}{u_n}$$

$$\text{donc } w_n - 1 = \frac{7}{u_n} \text{ et par conséquent } \frac{w_n - 1}{7} = \frac{1}{u_n}.$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{7}{w_n - 1}$$

Donc, en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$u_n = \frac{7}{\frac{10}{3} \times 8^n - 1} = \frac{21}{10 \times 8^n - 3}$$

Correction de l'exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n + 2} &= \frac{n \times \left(2n + 3 - \frac{1}{n}\right)}{n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= \frac{2n + 3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0, \text{ donc :}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n + 3 - \frac{1}{n}\right) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n + 3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\right) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 3n - 1}{n + 2}\right) = +\infty$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 2n - 6} &= \frac{n^2 \times \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}\right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}}\end{aligned}$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) &= 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}}\right) = 3$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 2n - 6}\right) = 3}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n^2 - 6n + 2 = n^2 \times \left(1 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \times \left(1 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\right) = +\infty$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 6n + 2) = +\infty}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n - \sqrt{n} + 1 = n \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)\right) = +\infty$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n} + 1) = +\infty}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2 - 1}{n^3 + 2n - 6} &= \frac{n^2 \times \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(n + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}\right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}}\end{aligned}$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n^2} \right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2} \right) = +\infty \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}} \right) = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3 + 2n - 6} \right) = 0$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{n} - 1}{n + 1} &= \frac{\sqrt{n} \times \left(3 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \times \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\sqrt{n} - 1}{n + 1} \right) = 0$