

Suites, préparation au DS 2

Exercice 1

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence.

(a) Calculer u_1 .

(b) Variation de la suite (u_n) .

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 2 - \frac{2}{2u_n + 1}$.

ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

iii. En déduire les variations de la suite (u_n)

2. Formule explicite de u_n .

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{2u_n}{2u_n - 3}$

(a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison 4.

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n .

(c) i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{3w_n}{2w_n - 2}$

ii. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8} \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence.

(a) Calculer u_1 .

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n$

- (c) En déduire les variations de la suite (u_n)
2. Formule explicite de u_n .
- Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 + \frac{7}{u_n}$
- (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = \frac{10}{3}$ et de raison 8.
- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n .
- (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 3

Déterminer si possibles les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n + 2}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 2n - 6}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 6n + 2)$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n} + 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^3 + 2n - 6}$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n} - 1}{n + 1}$