

TERMINALE - DS 2 DU 3 SEPTEMBRE

2026-2027



Correction de l'exercice 1

1. Démonstration par récurrence.

$$(a) \quad u_1 = \frac{4u_0 + 3}{u_0 + 2} = \frac{7}{3}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 4 - \frac{5}{u_n + 2} &= \frac{4(u_n + 2)}{u_n + 2} - \frac{5}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n + 8 - 5}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n + 3}{u_n + 2} \end{aligned}$$

$$\text{or } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}.$$

$$\text{Donc on a bien } u_{n+1} = 4 - \frac{5}{u_n + 2}$$

ii. Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1}$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{7}{3}$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1$ et par conséquent la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour l'entier n fixé. C'est à dire que :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2 &\leq u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{u_n + 2} \geq \frac{1}{u_{n+1} + 2} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[\\ \frac{-5}{2} &\leq \frac{-5}{u_n + 2} \leq \frac{-5}{u_{n+1} + 2} \end{aligned}$$

$$4 + \frac{-5}{2} \leq 4 + \frac{-5}{u_n + 2} \leq 4 + \frac{-5}{u_{n+1} + 2} \quad \text{avec } 0 \leq 4 + \frac{-5}{2}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion

$\mathcal{P}(n)$ est vraie $n = 0$ et $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir de ce rang, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) est croissante.

2. Formule explicite.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} \\
 &= \frac{\frac{4u_n + 3}{u_n + 2} - 3}{\frac{4u_n + 3}{u_n + 2} + 1} \\
 &= \frac{4u_n + 3 - 3u_n - 6}{4u_n + 3 + u_n + 2} \\
 &= \frac{u_n - 3}{5u_n + 5} \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \\
 &= \frac{1}{5} \times w_n
 \end{aligned}$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme

$$w_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

(b) La suite (w_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = -1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = -1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{5^n}$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

$$\text{d'où } w_n \times (u_n + 1) = u_n - 3$$

$$\text{donc } w_n u_n + w_n = u_n - 3$$

$$\text{donc } w_n u_n - u_n = -w_n - 3$$

$$\text{donc } u_n \times (w_n - 1) = -w_n - 3$$

$$\text{et par conséquent } \boxed{u_n = \frac{-w_n - 3}{w_n - 1} = \frac{w_n + 3}{1 - w_n}}$$

ii. D'après les questions précédentes, on a :

$$u_n = \frac{\frac{-1}{5^n} + 3}{1 + \frac{1}{5^n}}$$

$$\boxed{= \frac{3 \times (5^n - 1)}{5^n + 1}}$$

Correction de l'exercice 2