

TERMINALE - DS 3 DU 10 SEPTEMBRE

2026-2027



Correction de l'exercice 1

1. Affirmation 1 : Vraie

Méthode 1 : (la plus simple)

Soit (u_n) la suite définie pour tout naturel par $u_n = (n+1)^2$

- D'une part, on a $u_0 = (0+1)^2 = 1$.
- d'autre part :

$$\begin{aligned}u_n + 2n + 3 &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\&= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\&= n^2 + 4n + 4 \\&= (n+2)^2 \\&= [(n+1) + 1]^2 \\&= u_{n+1}\end{aligned}$$

les suites (u_n) et (w_n) sont donc deux suites ayant le même premier terme et vérifiant la même relation de récurrence, elle sont donc égales et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2$

Méthode 2 : méthode par récurrence classique

Pour tout entier naturel n , posons P_n l'affirmation : « $w_n = (n+1)^2$ ».

- **Initialisation :**

On a d'une part : $w_0 = 1$;
et d'autre part : $(0+1)^2 = 1$.
Donc l'affirmation P_0 est vraie.

- **Hérédité :**

Soit n un entier naturel.

On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est à dire que $w_n = (n+1)^2$.
d'où :

$$\begin{aligned}w_{n+1} &= w_n + 2n + 3 && \text{par définition de la suite } (w_n) \\&= (n+1)^2 + 2n + 3 && \text{D'après l'hypothèse de récurrence.} \\&= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\&= n^2 + 4n + 4 \\&= (n+2)^2\end{aligned}$$

Donc, dans ce cas, 0_{n+1} est vraie.

- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_0 est vraie, et que pour un n entier naturel, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

Donc, pour tout entier naturel n , l'affirmation est vraie, et par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (n+1)^2$$

2. L'affirmation 2 est fausse

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \cos(n)}{n + 1}$$

Pour tout entier n :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \text{ donc } 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$$

$$\frac{2n - 1}{n + 1} \leq \frac{2n + \cos(n)}{n + 1} \leq \frac{2n + 1}{n + 1} \quad \text{car } n + 1 > 0$$

$$\frac{2n + 2 - 3}{n + 1} \leq \frac{2n + \cos(n)}{n + 1} \leq \frac{2n + 2 - 1}{n + 1}$$

$$2 - 3 \times \frac{1}{n + 1} \leq v_n \leq 2 - \frac{1}{n + 1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 1} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - 3 \times \frac{1}{n + 1} = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n + 1} = 2$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$

La suite (v_n) converge vers 2.

3. L'affirmation 3 est fausse

Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n + 1}{1 - 3^n} \\ &= \frac{2^n}{3^n} \times \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3^n} - 1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} \end{aligned}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

Donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} &= -1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= 0 \quad \text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4. L'affirmation 4 est vraie

S_n est donc la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique.

On a donc, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$
 donc, par somme et produit,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-2n^3 + 3n - 1 = n^3 \times \left(-2 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3) = -\infty \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^3 \times \left(-2 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)\right) = -\infty$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^3 + 3n - 1) = -\infty$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{-2n^2 + n + 2}{2n^3} &= \frac{n^2 \times \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{2n^3} \\ &= \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2n} \end{aligned}$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n) = +\infty \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2n}\right) = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2n^2 + n + 2}{2n^3}\right) = 0$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{4(\sqrt{n}-1)} &= \frac{\sqrt{n} \times \left(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{4 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}) = +\infty$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 4 \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{4 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = +\infty$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{4(\sqrt{n}-1)} \right) = +\infty$
