

TERMINALE - DS 4 PRÉPARATION

2026-2027

Correction de l'exercice 1

Partie A

1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $x+3 \neq 0$, donc f est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+3) - (2x+2) \times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x+6-2x-2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{4}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

2. Pour tout réel $x \neq -3$, $(x+3)^2 > 0$, donc f' est positive sur $[1; +\infty[$ et par conséquent :

f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Partie B

1. Voir annexe
2. D'après le graphique, (u_n) semble décroissante et converger vers 1
3.

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= \frac{2(u_0+1)}{u_0+3} \\ &= \frac{2(2+1)}{2+3} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

4. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition définie sur $\mathbb{N}$ par : " $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ "
◦ INITIALISATION
 $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{6}{5} = 1,2$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$ et par conséquent $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
◦ HÉRÉDITÉ
Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour l'entier n fixé, d'où :

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ f(1) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[\\ 1 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad \text{car } f(1) = 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire sur $\mathbb{N}$

- CONCLUSION

$\mathcal{P}$ est vraie au rang 0 et est héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

5. D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.

Partie C

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} \\ &= \frac{2u_n + 2 - u_n - 3}{2u_n + 2 + 2u_n + 6} \\ &= \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} \\ &= \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} \\ &= \frac{1}{4} \times w_n \end{aligned}$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ w_n(u_n + 2) &= u_n - 1 \\ w_n u_n + 2w_n &= u_n - 1 \\ w_n u_n - u_n &= -2w_n - 1 \\ u_n(w_n - 1) &= -2w_n - 1 \\ u_n &= \frac{-2w_n - 1}{w_n - 1} \end{aligned}$$

Donc $u_n = \frac{2w_n + 1}{1 - w_n}$

3. D'après la question 1 de la partie C ; (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme

$w_0 = \frac{1}{4}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

D'où, d'après la question précédente :

$$u_n = \frac{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$$

4. $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ et par conséquent, par somme et par quotient, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$.

5. (a) .

```

1  def f(x) :
2      return 2*(x+1)/(x+3)
3
4  def seuil(s) :
5      u = 2
6      n = 0
7      while u >= s :
8          u = f(u)
9          n = n + 1
10     return n

```

(b) `seuil(1.001)` renvoie la valeur 5, c'est à dire que pour tout $n \geq 5$, on a $u_n < 1.001$.

Annexe 1

Nom :

Classe :

Prénom :

