

TERMINALE - DS 4 PRÉPARATION

2026-2027

Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{x+3}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2}$$

2. En déduire que f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 2$.
- Pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = f(u_n)$

1. Déterminer graphiquement et placer en annexe et sur l'axe des abscisses les réels u_0, u_1 et u_2 .
Vous laisserez les traits de constructions sur le graphique
2. Quelle conjecture peut-on alors raisonnablement émettre concernant les variations et la limite de la suite (u_n) ?
3. Calculer u_1 .
4. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Démontrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{4}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{2w_n + 1}{1 - w_n}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$$

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

5. On considère le script Python ci-dessous.

(a) Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]1 ; 2[$.

Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
1 def f(x) :  
2     return 2*(x+1)/(x+3)  
3  
4 def seuil(s) :  
5     u = 2  
6     n = 0  
7     while u ... s :  
8         u = .....  
9         n = .....  
10    return n
```

(b) Quelle valeur renvoie la commande `seuil(1.001)` ?

Annexe 1

Nom :

Classe :

Prénom :

