

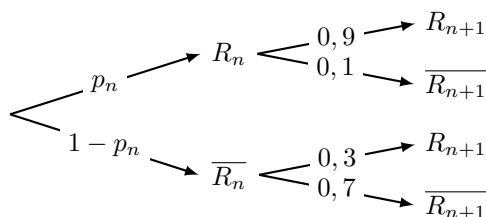
TERMINALE - DS 5 PRÉPARATION

2026-2027

Correction de l'exercice 1

Partie A

1.



2. $\{R_n ; \overline{R_n}\}$ est une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\
 &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3 \\
 &= 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n \\
 &= 0,6p_n + 0,3
 \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75 \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \\
 &= (0,6p_n + 0,3) - 0,75 \quad \text{par la relation de récurrence de la suite } (p_n) \\
 &= 0,6p_n - 0,45 \\
 &= 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \\
 &= 0,6u_n + 0,45 - 0,45 \\
 &= 0,6u_n
 \end{aligned}$$

Donc, la suite (u_n) une suite géométrique, de raison $q = 0,6$. Le premier terme :
 $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n. \\
 \text{or : } u_n &= p_n - 0,75 \\
 \text{Donc :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_n &= u_n + 0,75 \\
 &= 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.
 \end{aligned}$$

(c) $-1 < 0,6 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Par limite de la somme, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75$.

(d) En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas.

Partie B

1. Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » a une probabilité $p = 0,75$;
- cette expérience est répétée dix fois (la course comporte 10 haies), de manière indépendante , donc $n = 10$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$, on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès (le nombre de haies franchies pendant la course).

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,75)$.

2. $P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^0 = 0,75^{10} \approx 0,056$.

La probabilité que l'athlète franchisse les dix haies est donc d'environ 0,056.

3. A la calculatrice, on obtient $P(X \geq 9) \approx 0,244$.

Correction de l'exercice 2

1. 1 est une racine évidente de $x^2 - 3x + 2$, d'où $x^2 - 3x + 2$ est factorisable par $x - 1$ et on a :
 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ D'où la tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$u'(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = 2x - 3$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -e^{-x} \times (x^2 - 3x + 2) + e^{-x}(2x - 3) \\ &= e^{-x} \times (-x^2 + 3x - 2 + 2x - 3) \\ &= e^{-x} \times (-x^2 + 5x - 5) \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du même signe que $-x^2 + 5x - 5$.

Soit Δ le discriminant de $-x^2 + 5x - 5$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 5$$

$\Delta > 0$, donc $-x^2 + 5x - 5 = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-5 + \sqrt{5}}{-2} & x_2 &= \frac{-5 - \sqrt{5}}{-2} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} & &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient du terme de degré 2 de $-x^2 + 5x - 5$ est strictement négatif, d'où :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f'	$-$	0	0	$-$
f				

4. (a)

$$(\mathcal{T}_a) : y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

$$y = e^{-a}(-a^2 + 5a - 5) \times (x - a) + e^{-a}(a^2 - 3a + 2)$$

$$y = e^{-a}(-a^2 + 5a - 5) \times x + e^{-a}(a^3 - 5a^2 + 5a + a^2 - 3a + 2)$$

$$y = e^{-a}(-a^2 + 5a - 5) \times x + e^{-a}(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)$$

(b) L'axe des ordonnées (Oy) a pour équation $x = 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
 I(x; y) \in (\mathcal{T}_a) \cap (Oy) &\iff \begin{cases} y &= e^{-a}(-a^2 + 5a - 5) \times x + e^{-a}(a^3 - 4a^2 + 2a + 2) \\ x &= 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y &= e^{-a}(a^3 - 4a^2 + 2a + 2) \\ x &= 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, le point d'intersection $I(x, y)$ de la tangente $(\mathcal{T}_a)$ et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée :

$$y = (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a}$$