

TERMINALE - DS 5

2026-2027

Correction de l'exercice 1

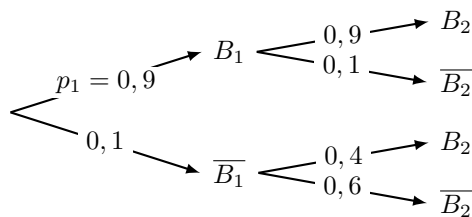
Partie A

Interprétons l'énoncé :

si n est un entier naturel, la phrase « lorsque la trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 » correspond à : $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,9$.

la phrase suivante se traduit par : $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$.

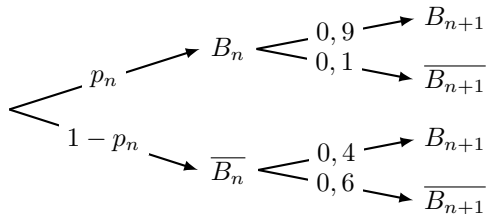
1. $p_0 = 1$, donc $p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) = 1 \times 0,9 = 0,9$.



Les événements B_1 et $\overline{B_1}$ formant une partition de l'univers, donc, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
 p_2 &= P(B_2) \\
 &= P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\
 &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) \\
 &= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 \\
 &= 0,81 + 0,04 \\
 &= 0,85
 \end{aligned}$$

2. On va donc avoir un arbre très similaire au précédent : les probabilités conditionnelles restent les mêmes.



3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition l'univers, donc, la formule des probabilités

totales donne :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
 &= P(B_n \cap B_{n+1}) + P(\overline{B_n} \cap B_{n+1}) \\
 &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 \\
 &= 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n \\
 &= 0,5p_n + 0,4
 \end{aligned}$$

4. (a) *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $p_0 = 1$ donc l'inégalité $p_0 \geq 0,8$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que, pour l'entier naturel n , l'inégalité $p_n \geq 0,8$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
 p_n &\geq 0,8 \\
 0,5p_n &\geq 0,4 \quad \text{car } 0,5 > 0 \\
 0,5p_n + 0,4 &\geq 0,4 + 0,4 \\
 p_{n+1} &\geq 0,8
 \end{aligned}$$

Donc si l'inégalité est vérifiée à l'ordre n , alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion :

l'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et elle est héréditaire pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, donc, par principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geq 0,8.$$

Autrement dit, on vient d'établir que la suite est minorée par 0,8.

5. (a) Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \\
 &= (0,5p_n + 0,4) - 0,8 \quad \text{par la relation de récurrence de la suite } (p_n) \\
 &= 0,5p_n - 0,4 \\
 &= 0,5(p_n - 0,8) \\
 &= 0,5u_n \quad \text{par définition de la suite } (u_n)
 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est donc une suite géométrique, de raison $q = 0,5$.

Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n. \\
 \text{or } u_n &= p_n - 0,8 \\
 \text{Donc } p_n &= u_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^n + 0,8.
 \end{aligned}$$

(c) $-1 < 0,5 < 1$, donc la suite (u_n) converge vers 0.

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers 0,8.

(d) soit $s \in]0,8; 1[$.

Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $p_n < s$.

```

1  def seuil(s) :
2      u = 1
3      n = 0
4      while u >= s :
5          u = 0.5*u + 0,4
6          n = n+1
7      return n

```

Partie B

1. Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une trottinette dans le parc de l'entreprise), le succès est « choisir une trottinette en bon état », de probabilité $p = 0,8$;
- cette expérience est répétée quinze fois (on constitue un lot de 15 trottinettes) de manière identique et indépendante (le prélèvement des 15 trottinettes est assimilable à un tirage avec remise), donc $n = 15$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$, on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès (le nombre de trottinettes en bon état dans le lot).

Donc, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$.

2. $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,8^{15} \times 0,2^0 = 0,8^{15}$.

La probabilité que les quinze trottinettes soient en bon état est donc de $0,8^{15}$ (ici, le sujet ne précise pas de consigne d'arrondi, donc on donne la valeur exacte. La valeur approchée au dix-millième près est 0,0352).

3. D'après la calculatrice : $P(X \geq 10) \approx 0,9389$.

4. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$, donc $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$.

Sur un très grand nombre de lot de 15 trottinettes, en moyenne, douze d'entre elles seront en bon état.

Correction de l'exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 4x + 2 \text{ et } v(x) = x - 2$$

$$u'(x) = 4x - 4 \text{ et } v'(x) = 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(4x - 4)(x - 2) - (2x^2 - 4x + 2)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 4x + 8 - 2x^2 + 4x - 2}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $(x - 2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du même signe que $2x^2 - 8x + 6$, c'est à dire du même signe que $x^2 - 4x + 3$.

On remarque que 1 est une racine évidente de $x^2 - 4x + 3$, donc $x^2 - 4x + 3$ est factorisable par $x - 1$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

D'autre part, le coefficient du terme de degré 2 de $x^2 - 4x + 3$ est strictement positif, d'où :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
f'		+	0	-		-	0	+

3. D'après la question précédente, on a :



x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
f		0		8	

4. D'après le tableau de variation, f est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; 2[$, elle admet donc un maximum de 0 pour $x = 1$.
5. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. D'après le tableau de variation $f'(1) = 0$ et $f(1) = 0$, donc :

$$(\mathcal{T}) : y = 0$$