

Dénombrement

I Cardinal et Principe additif

1 Cardinal



Définition

Soit E un ensemble fini, (c'est à dire ayant un nombre fini d'éléments).
On appelle cardinal de E , noté $\text{card}(E)$ le nombre d'élément de E



Exemples

2 Principe additif



Propriété (admise)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints.
(c'est à dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_i \cap A_j = \emptyset$).

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$$



Exemples

Remarque

Soit A une partie d'un ensemble E et $\bar{A}$ son complémentaire.

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Propriété

Soient A et B deux ensembles, on a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Exemples

Démonstration

II principe multiplicatif et k-uplet

1 principe multiplicatif

**Définition**

Soient E et F deux ensembles.

Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$.

**Exemples****Remarque**

Si A ou B est l'ensemble vide, alors $A \times B$ est aussi l'ensemble vide.

**Propriété**

Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

**Exemples****Démonstration**



Danger

Le signe $\times$ dans $E \times F$ est le produit cartésien. Le résultat est donc un ensemble de couple alors que le signe $\times$ dans $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$ représente la multiplication dans l'ensemble des entiers naturels et le résultat est un entier naturel.

2 k-uplet



Définition

Soient $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $E_1, E_2, \dots, E_k, k$ ensembles non vides.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des listes ordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ où $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i \in E_i$.

Chaque élément de ce produit cartésien est appelé k-uplet.



Propriété

Soient $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $E_1, E_2, \dots, E_k, k$ ensembles finis et non vides.

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_k)$$



Démonstration



Remarque

- Un 2-uplet est appelé un couple
- Un 3-uplet est appelé un triplet.

3 k-uplet d'un ensemble E^k



Définition

Soient E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul.

On appelle **k-uplet d'éléments de E** tout élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times \dots \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

 Exemple
 Propriété

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel non nul.

$$\text{card}(E^k) = \text{card}(E)^k = n^k$$

 Exemple
 Démonstration

4 k-uplet d'éléments distincts de E et permutation

 Définition

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n .
On appelle arrangement à k -éléments de E (ou k -arrangement) tout k -uplet d'éléments **distincts** de E

 Exemple

**Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On appelle factoriel de n l'entier naturel défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

**Exemple****Propriété**

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n .

Le nombre d'arrangement à k éléments de E (c'est à dire le nombre de k -uplet d'éléments distincts de E) est :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

**Démonstration****Définition**

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n

On appelle permutation de E tout n -arrangement d'éléments de E , c'est à dire tout n -uplet d'éléments distinct de E .

**Exemple**

I

♥ Propriété (admise)

⤴ Le nombre de permutation d'un ensemble de cardinal non nul n est $n!$

III Partie d'un ensemble et combinaisons**1 Partie d'un ensemble fini et combinaison****Définition**

- On appelle partie d'un ensemble fini A tout sous ensemble de A .
- Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k .
- Le nombre de combinaison de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$

**Exemple****Propriété**

⤴ Le nombre de partie d'un ensemble A de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est 2^n

**Démonstration**

♥ Propriété

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, on a :

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. **Relation de Pascale** : si $1 \leq k \leq n-1$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

§ Démonstration

♥ Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

§ Démonstration