

NOM : ..... Prénom : .....

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Le sujet est à rendre avec vos copies.

**PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)**

**12 × 0,5 point**

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question.

Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1. L'opération qui permet de calculer 25 % de 480 est :

|                                |                               |                                |                             |
|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a. $\frac{480}{25 \times 100}$ | b. $25 \times 480 \times 0,1$ | c. $\frac{480 \times 100}{25}$ | d. $\frac{1}{4} \times 480$ |
|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

L'opération qui permet de calculer 25% de 480 est  $480 \times \frac{25}{100}$  soit  $480 \times \frac{1}{4}$ .

Réponse d.

2. Voici trois nombres :

|                   |                      |              |
|-------------------|----------------------|--------------|
| $A = \frac{1}{5}$ | $B = \frac{19}{100}$ | $C = 0,21$ . |
|-------------------|----------------------|--------------|

Le classement par ordre croissant de ces trois nombres est :

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a. $A < B < C$ | b. $A < C < B$ | c. $B < A < C$ | d. $C < B < A$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

$A = \frac{1}{5} = 0,20$  ;  $B = \frac{19}{100} = 0,19$  et  $C = 0,21$

$0,19 < 0,20 < 0,21$  donc  $B < A < C$

Réponse c.

3. Voici quatre nombres :

|                                  |                                  |            |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|------------|----------------------------------|
| $A = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ | $B = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ | $C = 0,05$ | $D = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ |
|----------------------------------|----------------------------------|------------|----------------------------------|

Le plus grand de ces quatre nombres est :

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| a. A | b. B | c. C | d. D |
|------|------|------|------|

$A = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$  ;  $B = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$  ;  $C = 0,05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$  et  $D = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

Toutes les fractions ont le même numérateur, donc la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Réponse c.

4. Un article augmente de 10 % puis il augmente encore de 10 %.  
Après ces deux augmentations il a augmenté de :

|               |         |         |         |
|---------------|---------|---------|---------|
| a. $(10\%)^2$ | b. 19 % | c. 20 % | d. 21 % |
|---------------|---------|---------|---------|

Augmenter de 10%, c'est multiplier par  $1 + \frac{10}{100} = 1,1$ ; augmenter deux fois de 10%, c'est multiplier par  $1,1 \times 1,1 = 1,21$ .

$1,21 = 1 + \frac{21}{100}$  donc ça correspond à une augmentation de 21%.

Réponse d.

5. Le tiers d'un quart correspond à la fraction :

|                  |                  |                           |                   |
|------------------|------------------|---------------------------|-------------------|
| a. $\frac{1}{7}$ | b. $\frac{3}{4}$ | c. $\frac{1}{3} \times 4$ | d. $\frac{1}{12}$ |
|------------------|------------------|---------------------------|-------------------|

Le tiers d'un quart correspond à la fraction  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ .

Réponse d.

6. On considère  $A = 10 + 0,1 + \frac{1}{1000}$ . On a :

|                               |                         |                 |                 |
|-------------------------------|-------------------------|-----------------|-----------------|
| a. $A = \frac{20^{-1}}{1000}$ | b. $A = \frac{1}{1000}$ | c. $A = 10,101$ | d. $A = 10,110$ |
|-------------------------------|-------------------------|-----------------|-----------------|

$$A = 10 + 0,1 + \frac{1}{1000} = 10 + 0,1 + 0,001 = 10,101$$

Réponse c.

7. On considère  $A = 10^{10} + 10^{-10}$ .  $A$  est environ égal à :

|           |      |              |         |
|-----------|------|--------------|---------|
| a. $10^0$ | b. 0 | c. $10^{10}$ | $100^0$ |
|-----------|------|--------------|---------|

$10^{-10}$  es proche de 0 donc  $A \approx 10^{10}$ .

Réponse c.

8. Une durée de 100 minutes correspond à :

|            |               |                        |             |
|------------|---------------|------------------------|-------------|
| a. 1 heure | b. 1,40 heure | c. $\frac{5}{3}$ heure | d. 2 heures |
|------------|---------------|------------------------|-------------|

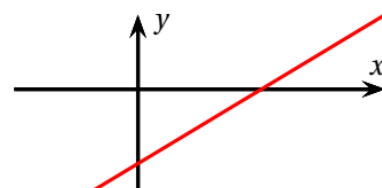
$\frac{1}{3}$  heure correspond à 20 minutes,  $\frac{2}{3}$  heure à 40 minutes.

$\frac{1}{3}$  heure correspondent à 60 minutes.

Réponse c.

9. On considère une droite  $D$  représentée ci-contre.

La seule équation pouvant correspondre à l'équation réduite de la droite  $D$  est :



|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| a. $y = x + 3$  | b. $y = x - 3$  |
| c. $y = -x + 3$ | d. $y = -x - 3$ |

La droite a un coefficient directeur positif et une ordonnée à l'origine négative.

Réponse b.

10. On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = 7 - \frac{1}{2}(x - 3)^2$ .

L'image de 3 par la fonction  $f$  est égale à :

|                      |                             |      |      |
|----------------------|-----------------------------|------|------|
| a. $7 - \frac{1}{2}$ | b. $7 - \frac{1}{2}(9 + 9)$ | c. 7 | d. 0 |
|----------------------|-----------------------------|------|------|

$$f(3) = 7 - \frac{1}{2}(3 - 3)^2 = 7 - 0 = 7$$

Réponse c.

11. Quand on développe  $(x - 3)^2$  on obtient :

|              |              |                   |                   |
|--------------|--------------|-------------------|-------------------|
| a. $x^2 + 9$ | b. $x^2 - 9$ | c. $x^2 + 6x + 9$ | d. $x^2 - 6x + 9$ |
|--------------|--------------|-------------------|-------------------|

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Réponse d.

12. Voici deux séries de valeurs :

Série A : 1 ; 2 ; 3

Série B : 0,5 ; 2 ; 100

Une seule de ces affirmations est exacte :

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| a. Les deux séries ont la même moyenne et la même médiane.       |
| b. Les deux séries ont la même moyenne mais pas la même médiane. |
| c. Les deux séries ont la même médiane mais pas la même moyenne. |
| d. Les deux séries n'ont ni la même moyenne ni la même médiane.  |

On regarde moyenne et médiane de chaque série.

- $1 + 2 + 3 = 6$  et  $0,5 + 2 + 100 = 102,5$  donc les deux séries n'ont pas la même moyenne.
- Les deux séries comportent 3 nombres donc leur médiane est le 2<sup>e</sup> nombre, c'est-à-dire 2 ; les deux séries ont la même médiane.

Réponse c.

## DEUXIEME PARTIE (14 pts)

### Exercice 1 ( 4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les trois points suivants :

$$A(-2; 1) ; B(4; 4) ; C(1; -1,5)$$

#### Partie A : Équations réduites de droites

1. Déterminer l'équation réduite de la droite  $(AB)$ .

Le coefficient directeur  $m$  de la droite  $(AB)$  se calcule par la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = 0,5$$

L'équation réduite de la droite  $(AB)$  est donc de la forme  $y = 0,5x + p$ .

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $p$ , on utilise les coordonnées du point  $A(-2; 1)$  :

$$1 = 0,5 \times (-2) + p \Leftrightarrow 1 = -1 + p \Leftrightarrow p = 2$$

Ainsi, l'équation réduite de la droite  $(AB)$  est :

$$y = 0,5x + 2$$

0,75 point

2. La droite  $d$  a pour équation réduite  $y = -2x + 0,5$ .

a) Montrer par le calcul que le point  $C(1; -1,5)$  appartient à la droite  $d$ .

Calculons la valeur de l'expression  $-2x + 0,5$  pour l'abscisse de  $C$  donc lorsque  $x = 1$  :

$$-2(1) + 0,5 = -2 + 0,5 = -1,5$$

On retrouve bien l'ordonnée du point  $C$ . Par conséquent, le point  $C$  appartient à la droite  $d$ .

0,5 point

b) Préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite  $d$ .

Le coefficient directeur de  $d$  est  $-2$  et son ordonnée à l'origine est  $0,5$ .

0,25 point

3. Justifier que les droites  $(AB)$  et  $d$  sont sécantes dans le plan.

La droite  $(AB)$  a pour coefficient directeur  $0,5$  et la droite  $d$  a pour coefficient directeur  $-2$ .

Leurs coefficients directeurs étant différents ( $0,5 \neq -2$ ), les deux droites ne sont pas parallèles.

Elles sont donc sécantes.

0,5 point

### Partie B : Système d'équations et point d'intersection

On note  $K$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $d$ .

1. Écrire le système d'équations vérifié par les coordonnées  $(x; y)$  du point  $K$ .

Puisque  $K$  appartient aux deux droites, ses coordonnées vérifient simultanément leurs équations réduites :

$$\begin{cases} y = 0,5x + 2 \\ y = -2x + 0,5 \end{cases}$$

0,5 point

2. Résoudre ce système par la méthode de votre choix (substitution ou combinaison).

Par égalité des expressions de  $y$  :

$$0,5x + 2 = -2x + 0,5 \Leftrightarrow 0,5x + 2x = 0,5 - 2 \Leftrightarrow 2,5x = -1,5 \Leftrightarrow x = \frac{-1,5}{2,5} = -0,6$$

Calculons ensuite  $y$  en remplaçant  $x$  par  $-0,6$  dans la première équation :

$$y = 0,5 \times (-0,6) + 2 = -0,3 + 2 = 1,7$$

0,5 point

3. En déduire les coordonnées exactes du point  $K$ .

Les coordonnées exactes du point d'intersection  $K$  sont  $K(-0,6; 1,7)$  (ou sous forme fractionnaire  $(-\frac{3}{5}; \frac{17}{10})$ ).

0,25 point

### Partie C : Droites parallèles

Soit  $d'$  la droite parallèle à  $(AB)$  passant par le point  $C$ .

1. Donner la valeur du coefficient directeur de la droite  $d'$ .

Puisque la droite  $d'$  est parallèle à  $(AB)$ , elles ont le même coefficient directeur.

Le coefficient directeur de  $d'$  est donc égal à celui de  $(AB)$ , c'est-à-dire  $0,5$ .

0,25 point

2. Déterminer l'équation réduite de la droite  $d'$ .

L'équation de  $d'$  est de la forme  $y = 0,5x + p'$ .

Puisque  $d'$  passe par le point  $C(1; -1,5)$ , ses coordonnées vérifient l'équation de  $d'$  :

$$-1,5 = 0,5 \times 1 + p' \Leftrightarrow -1,5 = 0,5 + p' \Leftrightarrow p' = -1,5 - 0,5 = -2$$

L'équation réduite de la droite  $d'$  est donc :

$$y = 0,5x - 2$$

0,5 point

## Exercice 2 ( 4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$  dont la représentation graphique est la parabole  $P$ .

### 1. Déterminer la forme canonique de la fonction $f$ .

Le polynôme est écrit sous la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 2$ ,  $b = -4$  et  $c = -16$ .

La forme canonique de  $f$  s'écrit :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et } \beta = f(\alpha)$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et } \beta = f(1) = -18$$

La forme canonique de  $f$  est donc :

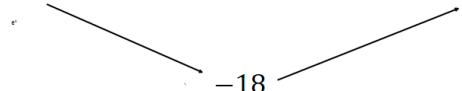
$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$$

1,5 point

### 2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ .

$S(\alpha; \beta)$  est le sommet de la parabole « orientée » vers le haut car  $a = 2 > 0$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$                                                                         | 1 | $+\infty$ |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $f$ |  |   |           |

0,5 point

### 3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ .

A l'aide de la forme canonique, on peut se passer du discriminant.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -3$$

Ou encore,  $x = 4$  ou  $x = -2$

Donc  $S = \{-2; 4\}$

1 point

### 4. En déduire la forme factorisée de $f$ et son tableau de signe.

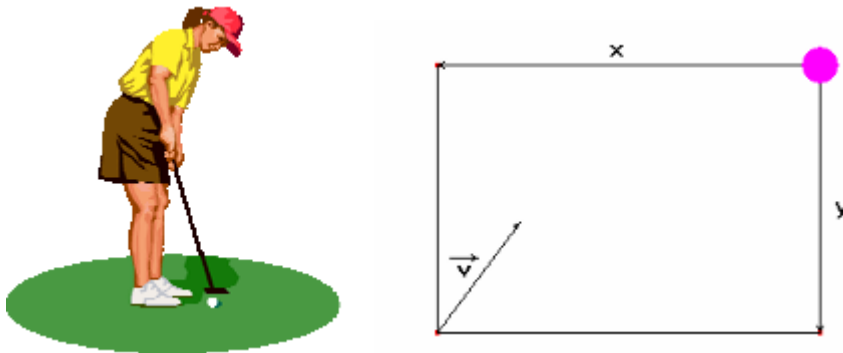
On alors  $f(x) = 2(x - 4)(x + 2)$  et le tableau de signe est le suivant :

| $x$                       | $-\infty$ | $-2$ | $4$ | $+\infty$ |   |
|---------------------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| Signe de $2x^2 - 4x - 16$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

1 point

### Exercice 3 ( 6 points)

Une balle de golf est frappée avec une vitesse initiale : vecteur  $\vec{v}$  qui forme un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On appelle  $y$  la hauteur atteinte par la balle quand celle-ci est située à une distance  $x$  du point où elle a été frappée, distance mesurée au sol (voir figure ci-dessous)



On admet que la balle décrit une parabole d'équation :  $y = -\frac{g}{2(v \cos \alpha)^2} x^2 + (\tan \alpha) x$   
où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $v$  est la norme du vecteur  $\vec{v}$ .  
On prend ici  $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v = 50 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\alpha = 45^\circ$

1. Montrer que l'équation de la parabole décrite par la balle est :

$$y = \left(-\frac{1}{250}\right)x^2 + x$$

(on prendra  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\tan 45^\circ = 1$ ).

Substituons les valeurs :

$$\begin{aligned} v \times \cos \alpha &= 50 \times \cos 45^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2} \\ y &= -\frac{10}{2(25\sqrt{2})^2} x^2 + 1 \times x \\ &= -\frac{10}{2 \times 25^2 \times 2} x^2 + x \\ &= -\frac{10}{2500} x^2 + x \\ &= -\frac{1}{250} x^2 + x \end{aligned}$$

1 point

2. Quelle est la hauteur atteinte par la balle quand elle se trouve à une distance  $x = 20$  m de l'endroit où elle a été tirée ?

Lorsque  $x = 20$  on a :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{250} 20^2 + 20 \\ &= -\frac{400}{250} + 20 \\ &= -1,6 + 20 \\ &= 18,4 \end{aligned}$$

Hauteur à 20 m : 18,4 m

1 point

3. A 30 m du point de départ de la balle se trouve un arbre, dont la hauteur est égale à 37 m. La balle passera-t-elle au-dessus de l'arbre ?

Lorsque  $x = 30$  on a :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{250}30^2 + 30 \\&= -\frac{900}{250} + 30 \\&= -3,6 + 30 \\&= 26,4\end{aligned}$$

Hauteur à 30 m : 26,4 m donc la balle ne passe pas au-dessus de l'arbre.

1 point

4. a) Factoriser  $P(x) = \left(-\frac{1}{250}\right)x^2 + x$

$$P(x) = \left(-\frac{1}{250}\right)x^2 + x = x\left(-\frac{1}{250}x + 1\right)$$

1 point

- b) Résoudre l'équation :  $P(x) = 0$

$$\begin{aligned}P(x) = 0 &\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{250}x + 1\right) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -\frac{1}{250}x + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 250\end{aligned}$$

$$S = \{0 ; 250\}$$

1 point

- c) A quelle distance  $x$  de l'endroit où elle a été tirée, la balle retombera-t-elle ?

La balle retombera lorsque  $y = 0$  c'est-à-dire lorsque  $x = 250$  m d'après la question précédente.

1 point

### Exercice BONUS (+1 point)

On considère l'équation  $(m + 8)x^2 + mx + 1 = 0$ .

Pour quelles valeurs de  $m$  cette équation admet-elle une unique solution ?

1<sup>er</sup> cas :  $m = -8$

Dans ce cas l'équation est du premier degré et admet une unique solution.

2<sup>ème</sup> cas :  $m \neq -8$

C'est une équation du second degré du type  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a = m + 8$ ,  $b = m$  et  $c = 1$ .

$$\Delta = m^2 - 4 \times (m + 8) \times 1 = m^2 - 4m - 32$$

L'équation admet une solution unique si et seulement si  $\Delta = 0$  soit  $m^2 - 4m - 32 = 0$

$m^2 - 4m - 32 = 0$  est à nouveau une équation du second degré de paramètre  $m$  qu'il faut résoudre.

$$\Delta' = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 16 + 128 = 144$$

Donc l'équation  $m^2 - 4m - 32 = 0$  admet deux solutions distinctes  $m_1$  et  $m_2$  :

$$m_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{144}}{2 \times 1} = \frac{4 + 12}{2} = 8 \text{ et } m_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{144}}{2 \times 1} = \frac{4 - 12}{2} = -4$$

**Conclusion :**

L'équation admet une unique solution réelle pour  $m = 8$  ou  $m = -4$  ou  $m = -8$ .

